

**FERNANDO LESSA TOFOLI**

**CONVERSORES**  
**CC-CC**  
**NÃO ISOLADOS**

**Análise, Modelagem e Controle**

**Artliber**  
EDITORIAL

Fernando Lessa Tofoli

**CONVERSORES CC-CC NÃO ISOLADOS  
ANÁLISE, MODELAGEM E CONTROLE**

**Artliber**  
EDITORA

Copyright© 2018 by Artliber Editora Ltda.

Revisão:

*Maria Carolina Garcia*

Capa e editoração:

*Editorando Birô*

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro)**

---

Tofoli, Fernando Lessa

Conversores CC-CC não isolados: análise,  
modelagem e controle / Fernando Lessa Tofoli. —  
São Paulo : Artliber, 2018.

224 p.

ISBN: 978-85-88098-81-7

1. Conversores de corrente elétrica 2. Engenharia elétrica  
3. Eletrônica de potência I. Título

18-0679

CDD 621.381

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Corrente elétrica : Conversores

2018

Todos os direitos desta edição são reservados à

**Artliber Editora Ltda.**

Av. Diógenes Ribeiro de Lima, 3294

05083-010 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: (11) 3832-5489 – 3641-3893

[info@artliber.com.br](mailto:info@artliber.com.br)

[www.artliber.com.br](http://www.artliber.com.br)

# SUMÁRIO

<b>Prefácio .....</b>	<b>9</b>
<b>1. Introdução ao estudo dos conversores CC-CC.....</b>	<b>11</b>
1.1 - Considerações preliminares.....	11
1.2 - Classificação dos conversores CC-CC .....	12
1.2 - Controle de fluxo de potência.....	14
1.4 - Conversor CC-CC abaixador elementar.....	15
1.5 - Conversor CC-CC abaixador com carga RLE e diodo de roda livre.....	20
<b>2. Conversor CC-CC <i>buck</i>.....</b>	<b>29</b>
2.1 - Análise da operação em MCC .....	29
2.2 - Análise da operação em MCD .....	43
<b>3. Conversor CC-CC <i>boost</i> .....</b>	<b>53</b>
3.1 - Análise da operação em MCC .....	53
3.2 - Análise da operação em MCD .....	65
<b>4. Conversor CC-CC <i>buck-boost</i> .....</b>	<b>75</b>
4.1 - Análise da operação em MCC .....	75
4.2 - Análise da operação em MCD .....	88

<b>5. Conversor CC-CC Ćuk .....</b>	<b>97</b>
5.1 - Análise da operação em MCC .....	97
5.2 - Análise da operação em MCD .....	112
<b>6. Conversor CC-CC SEPIC .....</b>	<b>125</b>
6.1 - Análise da operação em MCC .....	125
6.2 - Análise da operação em MCD .....	137
<b>7. Conversor CC-CC Zeta .....</b>	<b>151</b>
7.1 - Análise da operação em MCC .....	151
7.2 - Análise da operação em MCD .....	165
<b>8. Modelagem de pequenos sinais de conversores CC-CC empregando a técnica do espaço de estados médio .....</b>	<b>179</b>
8.1 - Considerações iniciais .....	179
8.2 - Obtenção da função de transferência que relaciona a tensão de saída frente a perturbações na razão cíclica .....	182
8.3 - Obtenção da função de transferência que relaciona a tensão de saída frente a perturbações na tensão de entrada .....	185
8.4- Modelagem de um conversor CC-CC <i>buck</i> operando em MCC .....	188
<b>9. Modelagem de pequenos sinais de conversores CC-CC operando em modo de condução contínua, empregando a técnica do interruptor PWM .....</b>	<b>195</b>
9.1 - Considerações iniciais .....	195
9.2 - Modelo do interruptor PWM .....	196

9.3 - Modelagem de pequenos sinais de um conversor <i>buck</i> operando em MCC.....	205
---	-----

**10. Modelagem de pequenos sinais de conversores CC-CC operando em modo de condução descontínua, empregando a técnica do interruptor PWM ..... 217**

10.1 - Considerações iniciais .....	217
-------------------------------------	-----

10.2 - Modelo do interruptor PWM em MCD .....	218
---	-----

10.3 - Modelagem de pequenos sinais de um conversor <i>buck</i> operando em MCD .....	226
---	-----

**11. Controle de conversores CC-CC operando em malha fechada .....237**

11.1 - Considerações iniciais .....	237
-------------------------------------	-----

11.2 - Fator K.....	241
---------------------	-----

11.3 - Técnicas de controle de conversores CC-CC .....	246
--	-----

# 7

## CONVERSOR CC-CC ZETA

### 7.1 - Análise da operação em MCC

#### 7.1.1 - Análise qualitativa

O conversor Zeta foi a última estrutura clássica de conversor CC-CC proposta, o que ocorreu na década de 1980. Na época, acreditava-se que existiam apenas seis conversores básicos, sendo que essa topologia recebeu esse nome em associação à sexta letra do alfabeto grego (alfa, beta, gama, delta, epsilon, zeta).

Trata-se de uma variação topológica dos conversores Čuk e SEPIC, a qual também possui característica abaixadora e elevadora, podendo ser entendida com a associação de um conversor *buck-boost* na entrada e um conversor *buck* na saída, como mostra a Fig. 7.1.

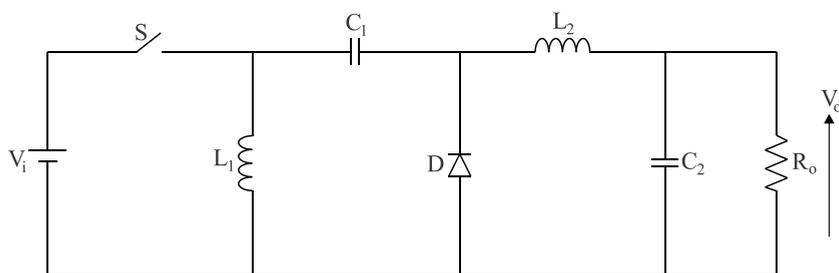


Fig. 7.1 – Conversor CC-CC Zeta

As principais características do conversor Zeta são:

- utilização de dois indutores e dois capacitores, sendo esse um sistema de quarta ordem;

- a corrente de entrada é descontínua, sendo necessária a utilização de um filtro passa-baixa para a redução de problemas associados à interferência eletromagnética, como ocorre nos conversores *buck* e *buck-boost*;
- a corrente entregue ao estágio de saída é contínua;
- como o interruptor controlado não é conectado ao mesmo nó de referência da fonte, isso demanda a utilização de circuitos de comando isolados;
- a tensão de saída possui a mesma polaridade da tensão de entrada;
- os esforços de tensão nos elementos semicondutores são idênticos àqueles existentes no conversores *buck-boost*, *Ćuk* e *SEPIC*;
- a transferência de energia ocorre através do capacitor de acoplamento;
- possui característica de fonte de tensão na entrada e fonte de corrente na saída, de acordo o circuito simplificado da Fig. 7.2.

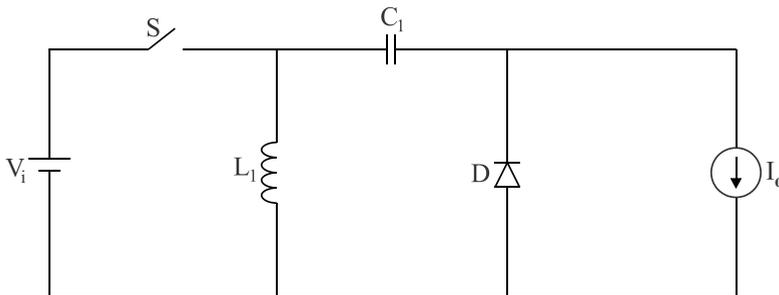


Fig. 7.2 – Circuito simplificado do conversor CC-CC Zeta

A operação do conversor Zeta em MCC é descrita segundo as etapas representadas na Fig. 7.3. Para a análise qualitativa do circuito, considera-se que o conversor opera em regime permanente e que todos os elementos existentes são ideais.

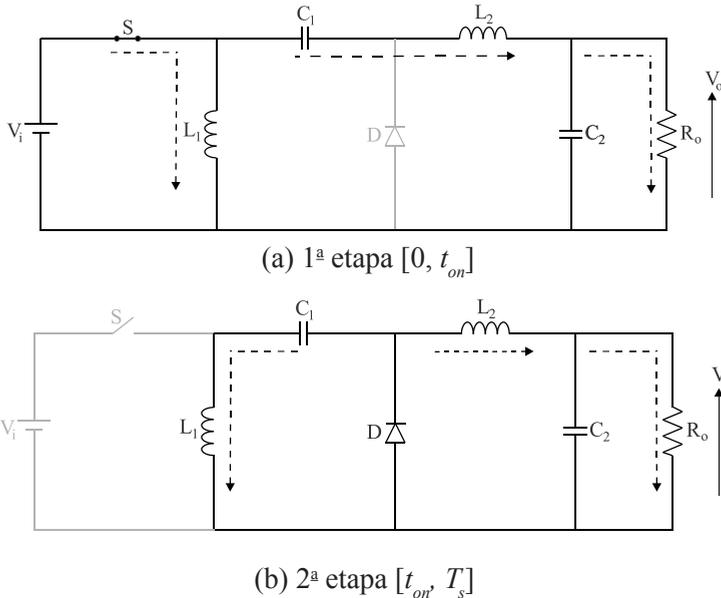


Fig. 7.3 – Etapas de operação de um conversor CC-CC Zeta em MCC

- 1ª etapa  $[0, t_{on}]$ : O interruptor conduz e o diodo permanece bloqueado. As correntes em  $L_1$  e  $L_2$  crescem linearmente. O capacitor  $C_1$  é descarregado, transferindo sua energia a  $L_2$ , enquanto o capacitor  $C_o$  é descarregado, alimentando a carga.
- 2ª etapa  $[t_{on}, T_s]$ : O interruptor é bloqueado, de modo que o diodo começa a conduzir. A energia previamente armazenada em  $L_1$  e  $L_2$  é transferida aos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente. Além disso, as correntes nos dois indutores decrescem linearmente. Essa etapa persiste até que o interruptor começa a conduzir novamente, iniciando-se o próximo ciclo de comutação.

As formas de onda teóricas correspondentes à operação do conversor Zeta em MCC são mostradas na Fig. 7.4.

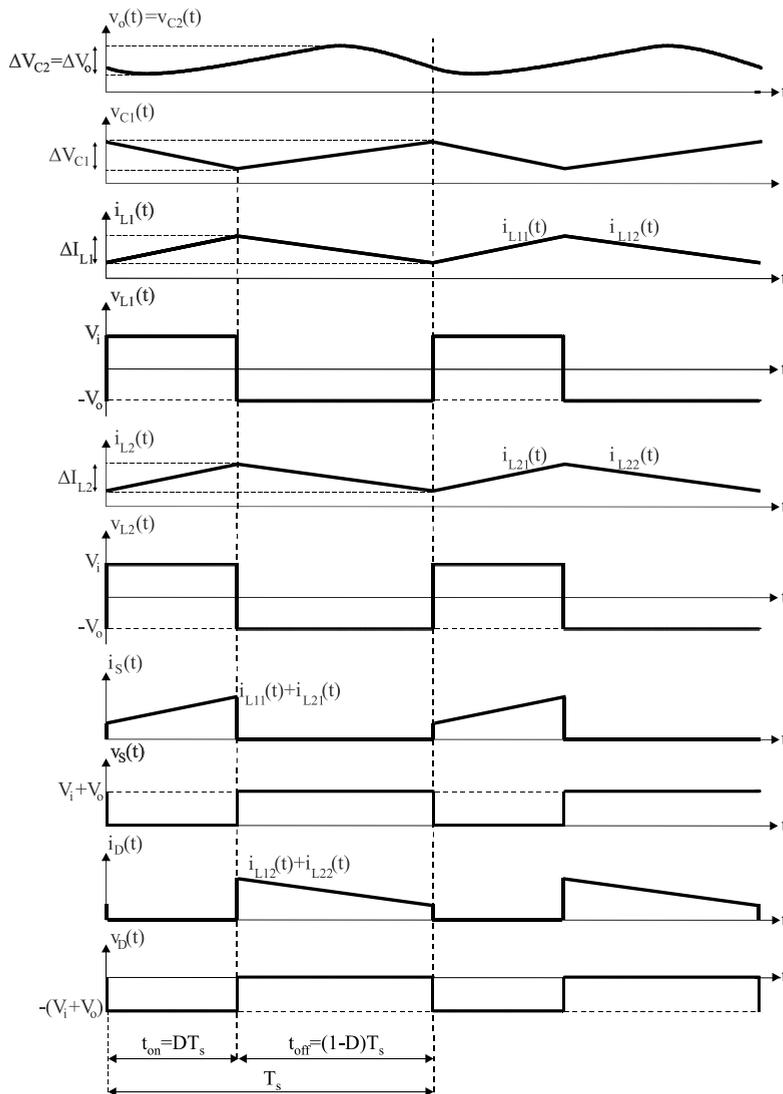


Fig. 7.4 – Formas de onda teóricas do conversor CC-CC Zeta em MCC

Assim como nos conversores *buck* e *buck-boost*, pode-se conectar o interruptor da topologia Zeta ao mesmo referencial da fonte de entrada como no circuito da Fig. 7.5, preservando ainda o princípio de funcionamento descrito previamente.

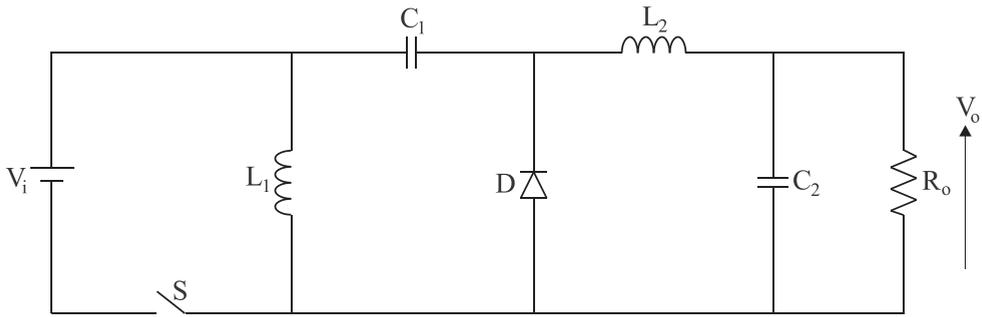


Fig. 7.5 – Representação alternativa do conversor CC-CC Zeta

### 7.1.2 - Determinação do ganho estático

Analisando os circuitos equivalentes que descrevem o funcionamento do conversor Zeta em CCM, por sua vez associados às suas respectivas formas de onda teóricas, é possível deduzir todas as expressões matemáticas para o projeto do estágio de potência.

De acordo com a Fig. 7.3 (a), tem-se:

$$V_{L11} = V_i \tag{7.1}$$

$$V_{L21} = V_i - V_{C1} + V_o \tag{7.2}$$

Em que  $V_{L11}$  e  $V_{L21}$  são os valores das tensões nos indutores  $L_1$  e  $L_2$  durante o primeiro estágio de operação, respectivamente, enquanto  $V_{C1}$  é a tensão média no capacitor  $C_1$ , considerada constante e livre de ondulações na análise que se segue.

A tensão instantânea em um indutor é definida por:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \tag{7.3}$$

Sendo que  $i_L(t)$  é a corrente instantânea no indutor.

Desconsiderando a ondulação na tensão de saída na primeira etapa, cuja duração é  $t_{on}$ , é possível definir as ondulações das correntes nos indutores  $L_1$

e  $L_2$  como sendo  $\Delta I_{L1}$  e  $\Delta I_{L2}$ , respectivamente. Assim, as seguintes expressões podem ser obtidas para a primeira etapa:

$$dt = t_{on} \quad (7.4)$$

$$\Delta I_{L1} = I_{L1(\text{máx.})} - I_{L1(\text{mín.})} \quad (7.5)$$

$$\Delta I_{L2} = I_{L2(\text{máx.})} - I_{L2(\text{mín.})} \quad (7.6)$$

Substituindo (7.1), (7.4) e (7.5) em (7.3), bem como substituindo (7.2), (7.4) e (7.6) em (7.3), são obtidas as seguintes expressões para os indutores:

$$V_i = L_1 \frac{\Delta I_{L1}}{t_{on}} \quad (7.7)$$

$$V_i - V_{C1} + V_o = L_2 \frac{\Delta I_{L2}}{t_{on}} \quad (7.8)$$

De acordo com a Fig. 7.3 (b), têm-se:

$$V_{L12} = -V_{C1} \quad (7.9)$$

$$V_{L22} = -V_o \quad (7.10)$$

Em que  $V_{L12}$  e  $V_{L22}$  são os valores das tensões nos indutores  $L_1$  e  $L_2$  durante o segundo estágio de operação, respectivamente.

De acordo com as etapas anteriormente apresentadas, os indutores  $L_1$  e  $L_2$  se carregam e descarregam a cada ciclo de comutação, a uma taxa constante em regime permanente. Assim, desconsiderando-se a ondulação da tensão de saída, pode-se escrever:

$$-\Delta I_{L1} = -\left(I_{L1(\text{máx.})} - I_{L1(\text{mín.})}\right) \quad (7.11)$$

$$-\Delta I_{L2} = -\left(I_{L2(\text{máx.})} - I_{L2(\text{mín.})}\right) \quad (7.12)$$

$$dt = t_{off} \quad (7.13)$$

Substituindo (7.9), (7.11) e (7.13) em (7.3), bem como substituindo (7.10), (7.12) e (7.13) em (7.3), têm-se:

$$V_{C1} = L_1 \frac{\Delta I_{L1}}{t_{off}} \quad (7.14)$$

$$V_o = L_2 \frac{\Delta I_{L2}}{t_{off}} \quad (7.15)$$

Além disso, os intervalos de condução e bloqueio do interruptor podem ser obtidos em função da razão cíclica da seguinte forma:

$$t_{on} = DT_s \quad (7.16)$$

$$t_{off} = (1-D)T_s \quad (7.17)$$

O ganho estático do conversor Zeta em MCC pode ser obtido considerando que a tensão média no indutor  $L_1$  é nula ao longo do período de comutação. Assim, a partir da forma de onda da tensão do indutor apresentada na Fig. 7.4, tem-se:

$$V_{L1(méd.)} = \frac{1}{T_s} \left[ \int_0^{t_{on}=DT_s} (V_i) dt + \int_{t_{on}=DT_s}^{T_s} (-V_{C1}) dt \right] = 0 \quad (7.18)$$

Resolvendo as integrais na expressão (7.18), é determinada a tensão média no capacitor  $C_1$ :

$$V_{C1} = \frac{DV_i}{1-D} \quad (7.19)$$

O cálculo da tensão média no indutor  $L_2$  é dado pela seguinte expressão:

$$V_{L2(méd.)} = \frac{1}{T_s} \left[ \int_0^{t_{on}=DT_s} (V_i - V_{C1} + V_o) dt + \int_{t_{on}=DT_s}^{T_s} (-V_o) dt \right] = 0 \quad (7.20)$$

Assim, a tensão no capacitor  $C_1$  pode ser obtida a partir de (7.20):

$$V_{C1} = \frac{DV_i + V_o(2D-1)}{D} \quad (7.21)$$

Igualando as expressões (7.19) e (7.21), chega-se ao ganho estático do conversor Zeta em MCC:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{D}{1-D} \quad (7.22)$$

Analogamente aos conversores *buck-boost*, Ćuk e SEPIC, a topologia Zeta apresenta características abaixadora e elevadora, isto é:

- $D < 0,5 \rightarrow V_o < V_i$  (abaixador ou *buck*);
- $D = 0,5 \rightarrow V_o = V_i$ ;
- $D > 0,5 \rightarrow V_o > V_i$  (elevador ou *boost*).

### 7.1.3 - Determinação das indutâncias $L_1$ e $L_2$

Assim como nos conversores Ćuk e SEPIC, têm-se:

$$I_{L1(\text{méd.})} = I_i \quad (7.23)$$

$$I_{L2(\text{méd.})} = I_o \quad (7.24)$$

Para pequenas ondulações das correntes nos indutores, menores ou iguais a 20% da corrente na carga, os valores médio e eficaz são aproximadamente iguais. Caso tais ondulações sejam elevadas, é necessário considerar as formas de onda de  $i_{L1}(t)$  e  $i_{L2}(t)$  mostradas na Fig. 7.4, com o objetivo de determinar os seus respectivos valores eficazes da seguinte forma:

$$I_{L1(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left[ \left( \int_0^{t_{on}} i_{L11}(t)^2 dt \right) + \left( \int_{t_{on}}^{T_s} i_{L12}(t)^2 dt \right) \right]} \quad (7.25)$$

$$I_{L2(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left[ \left( \int_0^{t_{on}} i_{L21}(t)^2 dt \right) + \left( \int_{t_{on}}^{T_s} i_{L22}(t)^2 dt \right) \right]} \quad (7.26)$$

Nestes casos,  $i_{L11}(t)$  e  $i_{L12}(t)$  são as expressões instantâneas que definem a corrente no indutor  $L_1$  na primeira e segunda etapas de operação, respectivamente; enquanto  $i_{L21}(t)$  e  $i_{L22}(t)$  representam as expressões instantâneas

da corrente no indutor  $L_2$  durante a primeira e segunda etapa de operação, respectivamente.

Os valores máximo e mínimo da corrente no indutor  $L_1$  são:

$$I_{L1(\text{máx.})} = I_i + \frac{\Delta I_{L1}}{2} \quad (7.27)$$

$$I_{L1(\text{mín.})} = I_i - \frac{\Delta I_{L1}}{2} \quad (7.28)$$

Analogamente, têm-se os respectivos valores máximo e mínimo da corrente no indutor  $L_2$ :

$$I_{L2(\text{máx.})} = I_o + \frac{\Delta I_{L2}}{2} \quad (7.29)$$

$$I_{L2(\text{mín.})} = I_o - \frac{\Delta I_{L2}}{2} \quad (7.30)$$

Analisando a Fig. 7.4 e considerando os pontos  $(0, I_{L1(\text{mín.})})$  e  $(t_{on}, I_{L1(\text{máx.})})$  associados às expressões (7.27) e (7.28), é possível obter a seguinte expressão:

$$i_{L11}(t) = \left( \frac{\Delta I_{L1}}{t_{on}} \right) t + \left( I_i - \frac{\Delta I_{L1}}{2} \right) \quad (7.31)$$

Como o cálculo de uma integral corresponde à determinação da área de uma determinada curva ao longo de um dado eixo, é possível adotar uma nova origem dos eixos sem que haja alterações no resultado final, com a finalidade de determinar  $i_{L12}(t)$  de forma mais simples. Assim, as expressões (7.25) e (7.26) podem ser reescritas como:

$$I_{L1(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left[ \left( \int_0^{t_{on}} i_{L11}(t)^2 dt \right) \right] + \left( \int_0^{t_{off}} i_{L12}(t)^2 dt \right)} \quad (7.32)$$

$$I_{L2(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left[ \left( \int_0^{t_{on}} i_{L21}(t)^2 dt \right) \right] + \left( \int_0^{t_{off}} i_{L22}(t)^2 dt \right)} \quad (7.33)$$

Analogamente, considerando os pontos  $(0, I_{L2(\text{máx.})})$  e  $(t_{off}, I_{L2(\text{mín.})})$ , a corrente  $i_{L12}(t)$  pode ser representada por:

$$i_{L12}(t) = -\left(\frac{\Delta I_{L1}}{t_{off}}\right)t + \left(I_i + \frac{\Delta I_{L1}}{2}\right) \quad (7.34)$$

Finalmente, substituindo-se (7.31) e (7.34) em (7.32), obtém-se:

$$I_{L1(ef.)} = \sqrt{\frac{12I_i^2 + \Delta I_{L1}^2}{12}} \quad (7.35)$$

Considerando um conversor ideal em que não há perdas, tem-se:

$$I_i = \frac{DI_o}{1-D} \quad (7.36)$$

Substituindo (7.36) em (7.35), tem-se:

$$I_{L1(ef.)} = \sqrt{\frac{\Delta I_{L1}^2 (1-D)^2 + 12D^2 I_o^2}{12(1-D)^2}} \quad (7.37)$$

Substituindo (7.16) em (7.7), é obtido o valor da indutância  $L_1$ :

$$L_1 = \frac{V_i D}{f_s \Delta I_{L1}} \quad (7.38)$$

Analogamente ao procedimento desenvolvido para o indutor  $L_1$ , é possível determinar as expressões instantâneas para a corrente no indutor  $L_2$  durante a primeira e a segunda etapa de funcionamento, segundo as seguintes expressões:

$$i_{L21}(t) = \left(\frac{\Delta I_{L2}}{t_{on}}\right)t + \left(I_o - \frac{\Delta I_{L2}}{2}\right) \quad (7.39)$$

$$i_{L22}(t) = -\left(\frac{\Delta I_{L2}}{t_{off}}\right)t + \left(I_o + \frac{\Delta I_{L2}}{2}\right) \quad (7.40)$$

Assim, substituindo (7.39) e (7.40) em (7.33), obtém-se:

$$I_{L2(ef)} = \sqrt{\frac{12I_o^2 + \Delta I_{L2}^2}{12}} \quad (7.41)$$

A expressão que permite obter a indutância  $L_2$  resulta da substituição de de (7.22) em (7.15):

$$L_2 = \frac{V_i D}{f_s \Delta I_{L2}} \quad (7.42)$$

### 7.1.4 - Determinação das capacitâncias $C_1$ e $C_2$

De acordo com a Fig. 7.3 (a), a descarga do capacitor  $C_1$  ocorre na primeira etapa de operação. Nesse elemento, circula a corrente de saída  $I_o$ . Assim, tem-se:

$$I_o \int dt = C_1 \int dv_c(t) \quad (7.43)$$

Como a duração da primeira etapa de operação é  $t_{on} = DT_s$  e a variação da tensão no capacitor é  $\Delta V_o = dv_c(t)$ , a capacitância  $C_1$  é dada por:

$$C_1 = \frac{DI_o}{\Delta V_{C1} f_s} \quad (7.44)$$

Por outro lado, enquanto a corrente no indutor  $L_2$  for maior que a corrente na carga (considerada constante, isto é, desprezando-se a sua respectiva ondulação), o capacitor  $C_2$  se carrega. Por outro lado, quando for menor, o capacitor se descarrega, provocando uma variação de tensão  $\Delta V_{C2}$ , conforme a Fig. 7.6.

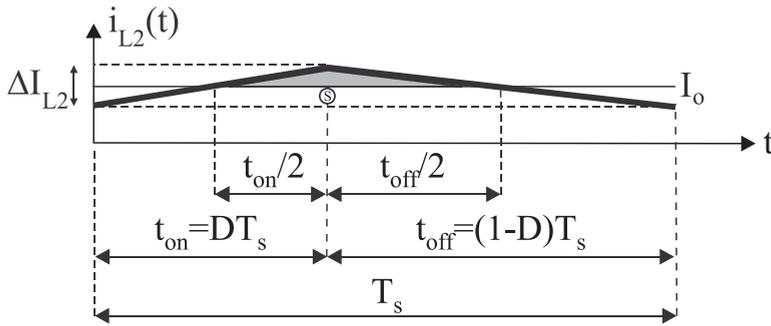


Fig. 7.6 – Forma de onda da corrente no indutor  $L_2$  e intervalos nos quais o capacitor  $C_2$  se carrega e descarrega em MCC

O capacitor  $C_2$  armazena uma quantidade de carga  $\Delta Q_2$  dada por:

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{t_{on}}{2} + \frac{t_{off}}{2} \right) \frac{\Delta I_{L2}}{2} = \frac{T_s \Delta I_{L2}}{8} = \frac{\Delta I_{L2}}{8f_s} \quad (7.45)$$

Isolando  $\Delta I_{L2}$  em (7.42) e substituindo esse parâmetro em (7.45), tem-se:

$$\Delta Q_2 = \frac{V_i D}{8f_s^2 L_2} \quad (7.46)$$

De forma genérica, a capacitância é definida por:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (7.47)$$

Substituindo (7.46) em (7.47), obtém-se:

$$C_2 = \frac{V_i D}{8f_s^2 L_2 \Delta V_{C2}} \quad (7.48)$$

### 7.1.5 - Determinação dos esforços de corrente e tensão nos elementos semicondutores

Para calcular os esforços de corrente e tensão nos elementos semicondutores, é necessário considerar as formas de onda da corrente e tensão

instantâneas da Fig. 7.4. Os valores médio e eficaz da corrente no interruptor  $S$  são dados por:

$$I_{S(\text{méd.})} = \frac{1}{T_s} \int_0^{t_{on}} [i_{L11}(t) + i_{L21}(t)] dt \quad (7.49)$$

$$I_{S(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{t_{on}} [i_{L11}(t) + i_{L21}(t)]^2 dt} \quad (7.50)$$

Substituindo (7.31) e (7.39) em (7.49) e (7.50), têm-se:

$$I_{S(\text{méd.})} = D(I_i + I_o) \quad (7.51)$$

$$I_{S(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{D[12(I_i + I_o)^2 + (\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})^2]}{12}} \quad (7.52)$$

Substituindo (7.36) em (7.51) e (7.52), obtêm-se:

$$I_{S(\text{méd.})} = \frac{DI_o}{1-D} \quad (7.53)$$

$$I_{S(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{D\{[(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})(1-D)]^2 + 12I_o^2\}}{12(1-D)^2}} \quad (7.54)$$

Se as ondulações das correntes nos indutores forem pequenas, a expressão (7.54) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$I_{S(\text{ef.})} = \frac{\sqrt{D}I_o}{1-D} \quad (7.55)$$

A máxima tensão de bloqueio no interruptor é:

$$V_{S(\text{máx.})} = V_i - V_{L12} = V_i + V_o \quad (7.56)$$

Além disso, as correntes média e eficaz no diodo são obtidas pelas seguintes expressões:

$$I_{D(\text{méd.})} = \frac{1}{T_s} \int_0^{t_{\text{off}}} [i_{L12}(t) + i_{L22}(t)] dt \quad (7.57)$$

$$I_{D(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{t_{\text{off}}} [i_{L12}(t) + i_{L22}(t)]^2 dt} \quad (7.58)$$

Substituindo (7.34) e (7.40) em (7.57) e (7.58), têm-se:

$$I_{D(\text{méd.})} = (1-D)(I_i + I_o) \quad (7.59)$$

$$I_{D(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{(1-D) \left[ 12(I_i + I_o)^2 + (\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})^2 \right]}{12}} \quad (7.60)$$

Substituindo (7.36) em (7.59) e (7.60), têm-se:

$$I_{D(\text{méd.})} = I_o \quad (7.61)$$

$$I_{D(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{[(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})(1-D)]^2 + 12I_o^2}{12(1-D)}} \quad (7.62)$$

Considerando pequenos valores da ondulação da corrente no indutor, a expressão (7.62) pode ser simplificada:

$$I_{D(\text{ef.})} = \frac{I_o}{\sqrt{1-D}} \quad (7.63)$$

A análise da Fig. 7.3 (a) permite concluir que a máxima tensão à qual o diodo é submetido é:

$$V_{D(\text{máx.})} = -(V_{L21} + V_o) = -(V_i + V_o) \quad (7.64)$$

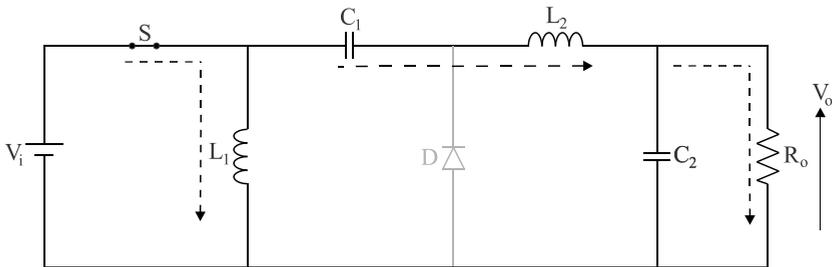
Como era esperado, as expressões que definem os esforços de corrente e tensão no conversor Zeta são as mesmas que aquelas obtidas para os conversores *buck-boost*, *Ćuk* e *SEPIC* operando em CCM.

## 7.2 - Análise da operação em MCD

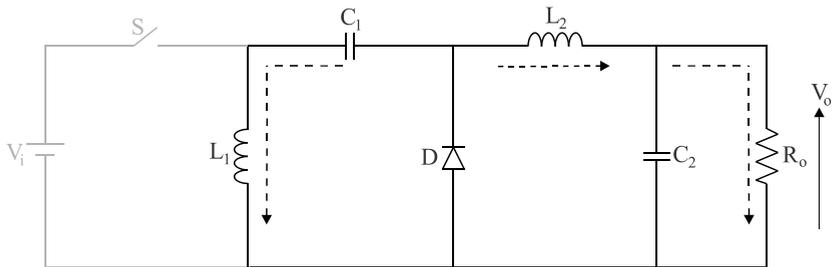
### 7.2.1 - Análise qualitativa

Nos conversores Ćuk, SEPIC e Zeta, a operação em MCD é caracterizada pelo bloqueio do diodo ao final da segunda etapa de funcionamento. Dessa forma, a soma das correntes nos indutores  $L_1$  e  $L_2$  se anula ao final dessa mesma etapa.

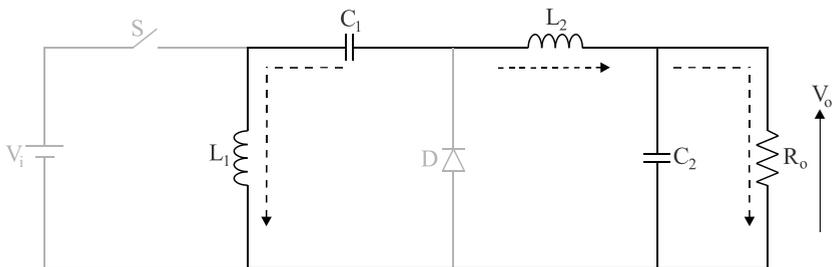
Para estudar a operação do conversor Zeta em MCD, são considerados os circuitos equivalentes da Fig. 7.7. Neste caso, o circuito opera em regime permanente e todos os elementos existentes são ideais.



(a) 1ª etapa  $[0, t_{on}]$



(b) 2ª etapa  $[t_{on}, t_{on} + t_d]$



(c) 3ª etapa  $[t_{on} + t_d, T_s]$

Fig. 7.7 – Etapas de operação de um conversor CC-CC Zeta em MCD

- 1ª etapa  $[0, t_{on}]$ : Quando o interruptor começa a conduzir, a corrente no indutor  $L_1$  cresce linearmente de zero a um valor máximo, sendo que a tensão aplicada a esse elemento é  $V_i$ . Além disso, o capacitor  $C_1$  se descarrega, fornecendo sua energia ao indutor  $L_2$ , cuja corrente instantânea cresce linearmente. O capacitor  $C_2$  também se descarrega nessa etapa.
- 2ª etapa  $[t_{on}, t_{on} + t_d]$ : No início dessa etapa, o interruptor  $S$  é bloqueado. A corrente no indutor  $L_1$  decresce linearmente, sendo que o capacitor  $C_1$  é novamente carregado. A descarga linear do indutor  $L_2$  implica o fornecimento de energia ao estágio de saída.
- 3ª etapa  $[t_{on} + t_d, T_s]$ : Quando o diodo é bloqueado ao final da etapa anterior, apenas o capacitor  $C_2$  fornece energia à carga. As correntes instantâneas nos indutores são iguais em módulo e possuem sentidos opostos. Essa situação persiste até que o interruptor comece a conduzir no início do próximo ciclo de comutação.

A operação do conversor Zeta em MCD é caracterizada pelas formas de onda teóricas da Fig. 7.8, constatando-se que a soma das correntes em  $L_1$  e  $L_2$  é nula durante a terceira etapa de operação.

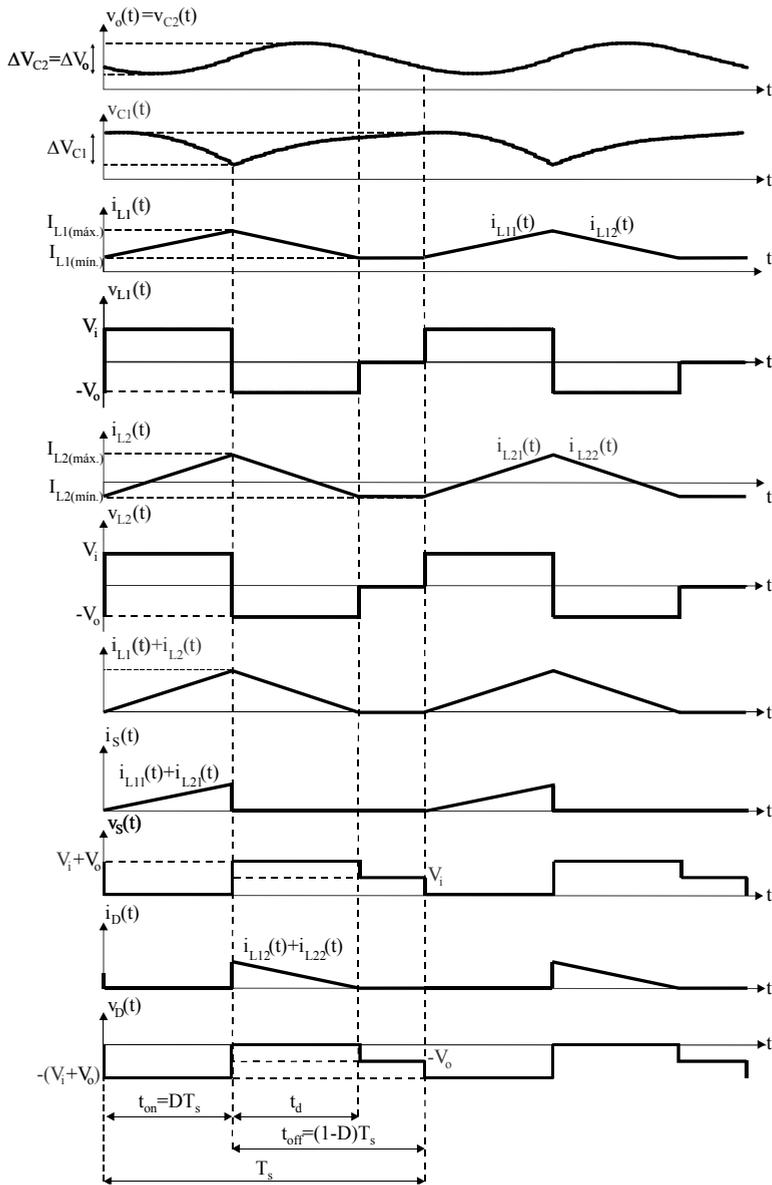


Fig. 7.8 – Formas de onda teóricas do conversor CC-CC Zeta em MCD

### 7.2.2 - Determinação do ganho estático

Por meio da análise de malhas aplicada aos circuitos equivalentes da Fig. 7.7 e as formas de onda da Fig. 7.8, chegam-se às seguintes expressões:

$$\Delta I_{L1} = \frac{DT_s V_i}{L_1} \quad (7.65)$$

$$\Delta I_{L1} = \frac{t_d V_o}{L_1} \quad (7.66)$$

$$\Delta I_{L2} = \frac{DT_s V_i}{L_2} \quad (7.67)$$

$$\Delta I_{L2} = \frac{t_d V_o}{L_2} \quad (7.68)$$

Para determinar o ganho estático do conversor em MCD, deve-se considerar que a tensão média no indutor  $L_1$  é nula em regime permanente, isto é:

$$V_{L1(\text{méd.})} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} v_{L1}(t) dt = \frac{1}{T_s} \left( \int_0^{t_{on}} v_{L11}(t) dt + \int_{t_{on}}^{t_{on}+t_d} v_{L12}(t) dt + \int_{t_{on}+t_d}^{T_s} v_{L13}(t) dt \right) = 0 \quad (7.69)$$

Sendo que  $v_{L11}(t)$ ,  $v_{L12}(t)$  e  $v_{L13}(t)$  representam o comportamento da tensão instantânea no indutor  $L_1$  durante a primeira, segunda e terceira etapa de funcionamento, respectivamente.

Resolvendo-se (7.69) de acordo com a forma de onda de  $v_{L1}(t)$  na Fig. 7.8, tem-se:

$$V_{C1} = \frac{DT_s V_i}{t_d} \quad (7.70)$$

Além disso, a tensão média no indutor  $L_2$  é:

$$V_{L2(\text{méd.})} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} v_{L2}(t) dt = \frac{1}{T_s} \left( \int_0^{t_{on}} v_{L21}(t) dt + \int_{t_{on}}^{t_{on}+t_d} v_{L22}(t) dt + \int_{t_{on}+t_d}^{T_s} v_{L23}(t) dt \right) = 0 \quad (7.71)$$

Sendo que  $v_{L21}(t)$ ,  $v_{L22}(t)$  e  $v_{L23}(t)$  representam o comportamento da tensão instantânea no indutor  $L_2$  durante a primeira, segunda e terceira etapa de funcionamento, respectivamente.

Resolvendo (7.71) de acordo com a forma de onda de  $v_{L2}(t)$  da Fig. 7.8, tem-se:

$$t_d = \frac{DT_s (V_i - V_{C1} + V_o)}{V_o} \quad (7.72)$$

Substituindo (7.72) em (7.70), obtém-se:

$$V_{C1} = V_o \quad (7.73)$$

Substituindo (7.73) em (7.72), pode-se determinar o ganho estático do conversor em MCD:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{DT_s}{t_d} \quad (7.74)$$

Segundo a Fig. 7.8, as correntes instantâneas no indutor  $L_1$  durante a primeira, a segunda e a terceira etapa de funcionamento são:

$$i_{L11}(t) = \left( \frac{\Delta I_{L1}}{t_{on}} \right) t + I_{L1(\text{mín.})} \quad (7.75)$$

$$i_{L12}(t) = - \left( \frac{\Delta I_{L1}}{t_d} \right) t + I_{L1(\text{máx.})} \quad (7.76)$$

$$i_{L13}(t) = I_{L1(\text{mín.})} \quad (7.77)$$

Sendo que  $I_{L1(\text{mín.})}$  e  $I_{L1(\text{máx.})}$  definem os valores mínimo e máximo da corrente no indutor  $L_1$ , respectivamente, cuja ondulação é dada por:

$$\Delta I_{L1} = I_{L1(\text{máx.})} - I_{L1(\text{mín.})} \quad (7.78)$$

A corrente média no indutor  $L_1$ , que é igual à corrente média de entrada, pode ser calculada por:

$$I_{L1(\text{méd.})} = I_i = \frac{1}{T_s} \left\{ \left[ \int_0^{t_{on}} i_{L11}(t) dt \right] + \left[ \int_0^{t_d} i_{L12}(t) dt \right] + \left[ \int_0^{T_s - (t_{on} + t_d)} i_{L13}(t) dt \right] \right\} \quad (7.79)$$

Substituindo as expressões (7.75) a (7.78) em (7.79), obtém-se:

$$I_i = \frac{I_{L1(\text{máx.})}(t_{on} + t_d) + I_{L1(\text{mín.})}[2T_s - (t_{on} + t_d)]}{2T_s} \quad (7.80)$$

Substituindo (7.78) em (7.65), é possível calcular o valor máximo da corrente no indutor  $L_1$ :

$$I_{L1(\text{máx.})} = I_{L1(\text{mín.})} + \frac{V_i D T_s}{L_1} \quad (7.81)$$

Finalmente, substituindo (7.81) em (7.80), é determinado o valor mínimo da corrente no indutor  $L_1$ :

$$I_{L1(\text{mín.})} = I_i - \frac{V_i D^2 T_s (V_i + V_o)}{2L_1 V_o} \quad (7.82)$$

As correntes instantâneas no indutor  $L_2$  durante a primeira, a segunda e a terceira etapa de funcionamento são dadas por:

$$i_{L21}(t) = \left( \frac{\Delta I_{L2}}{t_{on}} \right) t + I_{L2(\text{mín.})} \quad (7.83)$$

$$i_{L22}(t) = - \left( \frac{\Delta I_{L2}}{t_d} \right) t + I_{L2(\text{máx.})} \quad (7.84)$$

$$i_{L23}(t) = I_{L2(\text{mín.})} \quad (7.85)$$

Sendo que  $I_{L2(\text{mín.})}$  e  $I_{L2(\text{máx.})}$  definem os valores mínimo e máximo da corrente no indutor  $L_2$ , respectivamente, cuja ondulação é dada por:

$$\Delta I_{L2} = I_{L2(\text{máx.})} - I_{L2(\text{mín.})} \quad (7.86)$$

A corrente média no indutor  $L_2$  é igual à corrente média de saída, sendo calculada por:

$$I_{L2(\text{méd.})} = I_o = \frac{1}{T_s} \left\{ \left[ \int_0^{t_{on}} i_{L21}(t) dt \right] + \left[ \int_0^{t_d} i_{L22}(t) dt \right] + \left[ \int_0^{T_s - (t_{on} + t_d)} i_{L23}(t) dt \right] \right\} \quad (7.87)$$

Substituindo as expressões (7.83) a (7.86) em (7.87), tem-se:

$$I_o = \frac{I_{L2(\text{máx.})}(t_{on} + t_d) + I_{L2(\text{mín.})} [2T_s - (t_{on} + t_d)]}{2T_s} \quad (7.88)$$

Substituindo (7.86) em (7.67), obtém-se:

$$I_{L2(\text{máx.})} = I_{L2(\text{mín.})} + \frac{V_i D T_s}{L_2} \quad (7.89)$$

Assim, é possível definir o valor mínimo da corrente no indutor  $L_2$  ao se substituir (7.89) em (7.88):

$$I_{L2(\text{mín.})} = I_o - \frac{V_i D^2 T_s (V_i + V_o)}{2L_2 V_o} \quad (7.90)$$

Além disso, a análise da Fig. 7.7 (c) permite concluir que:

$$I_{L1(\text{mín.})} = -I_{L2(\text{mín.})} \quad (7.91)$$

Substituindo-se (7.82) e (7.90) em (7.91) e realizando algumas manipulações matemáticas, chega-se à expressão que representa o ganho estático do conversor Zeta em MCD:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{D^2 V_i (L_1 + L_2)}{2L_1 L_2 f_s I_o} \quad (7.92)$$

Essa expressão é exatamente idêntica àquelas que representam os ganhos estáticos dos conversores *Ćuk* e *SEPIC* em MCD. De acordo com (7.92), as indutâncias  $L_1$  e  $L_2$  encontram-se em paralelo, isto é:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (7.93)$$

Então, é possível substituir (7.93) em (7.92), resultando em:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{D^2 V_i}{2L_{eq} f_s I_o} \quad (7.94)$$

O tempo de descarga dos indutores pode ser determinado igualando-se (7.74) e (7.94):

$$t_d = \frac{2I_o L_{eq}}{DV_i} \quad (7.95)$$

A característica de saída do conversor Zeta é idêntica àquela dos conversores Ćuk e SEPIC, como mostra a Fig. 7.9.

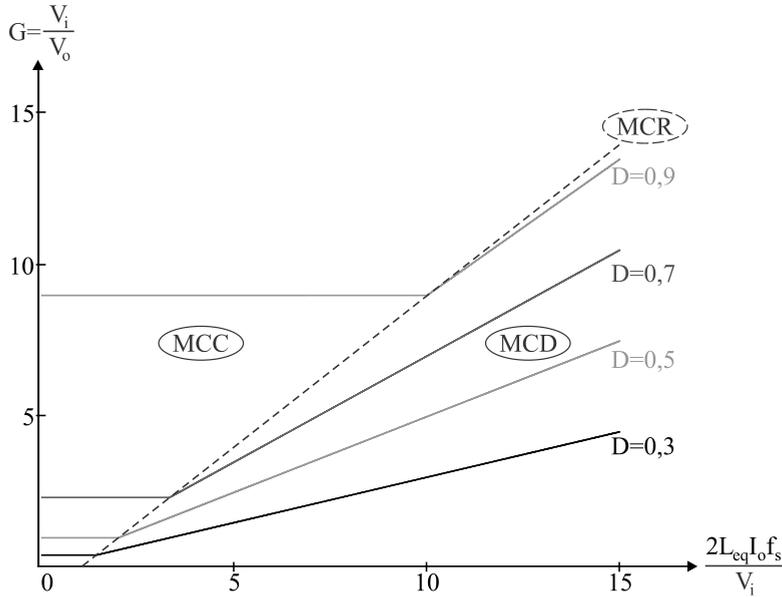


Fig. 7.9 – Característica de saída do conversor CC-CC Zeta

### 7.2.3 - Determinação da indutância crítica

Na condução crítica, as ondulações das correntes nos indutores são:

$$\Delta I_{L1} = I_{L1(\text{máx.})} = 2I_i \quad (7.96)$$

$$\Delta I_{L2} = I_{L2(\text{máx.})} = 2I_o \quad (7.97)$$

Substituindo (7.22), (7.36) e (7.96) em (7.38), obtém-se:

$$L_{1(\text{crit.})} = \frac{V_i^2 D}{2V_o I_o f_s} \quad (7.98)$$

Substituindo-se (7.74) e (7.97) em (7.68), obtém-se:

$$L_{2(\text{crit.})} = \frac{V_i D}{2I_o f_s} \quad (7.99)$$

Segundo a associação em paralelo dada por (7.93), a indutância crítica é calculada por:

$$L_{eq(\text{crit.})} = \frac{L_{1(\text{crit.})} L_{2(\text{crit.})}}{L_{1(\text{crit.})} + L_{2(\text{crit.})}} = \frac{D V_i^2}{2 f_s I_o (V_i + V_o)} \quad (7.100)$$

Em MCD, as ondulações das correntes nos dois indutores são consideráveis, sendo que nesse caso os valores médios não são aproximadamente iguais aos respectivos valores eficazes. Assim, as correntes eficazes nos indutores  $L_1$  e  $L_2$  são:

$$I_{L1(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left[ \left( \int_0^{t_{on}} i_{L11}(t)^2 dt \right) + \left( \int_0^{t_d} i_{L12}(t)^2 dt \right) + \left( \int_0^{T_s - (t_{on} + t_d)} i_{L13}(t)^2 dt \right) \right]} \quad (7.101)$$

$$I_{L2(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \left[ \left( \int_0^{t_{on}} i_{L21}(t)^2 dt \right) + \left( \int_0^{t_d} i_{L22}(t)^2 dt \right) + \left( \int_0^{T_s - (t_{on} + t_d)} i_{L23}(t)^2 dt \right) \right]} \quad (7.102)$$

Substituindo (7.75), (7.76) e (7.77) em (7.101), tem-se:

$$I_{L1(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{3 \left\{ D^3 V_i^4 \left[ V_i V_o (4 - 6D) - 3D (V_i^2 + V_o^2) + 4V_o^2 \right] \right\} + 12V_o^4 I_o^2 f_s^2 L_1^2}{6V_i V_o f_s L_1}} \quad (7.103)$$

Substituindo (7.83), (7.84) e (7.85) em (7.102), tem-se:

$$I_{L2(\text{ef})} = \sqrt{\frac{D^3 V_i^2 \left[ 4V_o (V_i + V_o) - 3D (V_i + V_o)^2 \right] + 12 (V_o I_o f_s L_2)^2}{12 (V_o f_s L_2)^2}} \quad (7.104)$$

### 7.2.4 - Determinação das capacitâncias $C_1$ e $C_2$

Na primeira etapa de operação, o capacitor  $C_1$  se descarrega por meio da corrente no indutor  $L_2$ , como mostram as formas de onda da Fig. 7.10. Isso ocorre entre os instantes em que tal corrente se anula e assume o valor máximo, os quais correspondem a  $t_1$  e  $t_{on}$ , respectivamente.

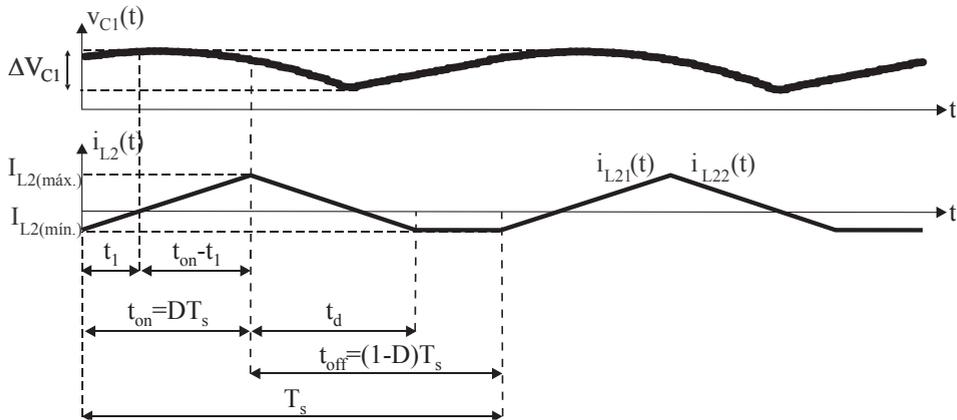


Fig. 7.10 – Formas de onda da corrente no indutor  $L_2$  e no capacitor  $C_1$ , evidenciando os intervalos nos quais o capacitor  $C_1$  se carrega e descarrega no conversor Zeta em MCD

Assim, a corrente no capacitor  $C_1$  é dada por:

$$i_{C1}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt} \quad (7.105)$$

Logo, a ondulação da tensão no capacitor  $C_1$  é:

$$C_1 = \frac{1}{\Delta V_{C1}} \int_{t_1}^{t_{on}} i_{L21}(t) dt \quad (7.106)$$

O instante  $t_1$  pode ser determinado igualando-se (7.83) a zero:

$$t_1 = \frac{-I_{L2(\text{mín.})} t_{on}}{I_{L2(\text{máx.})} - I_{L2(\text{mín.})}} \quad (7.107)$$

Substituindo (7.16), (7.83), (7.89), (7.90) e (7.107) em (7.106), chega-se a:

$$C_1 = \frac{[V_i D^2 (V_i + V_o) - 2V_o (V_i D + I_o f_s L_2)]^2}{8L_2 V_i V_o^2 f_s^2 \Delta V_{C1}} \quad (7.108)$$

Na segunda etapa de funcionamento, a carga do capacitor  $C_2$  ocorre entre os instantes nos quais a corrente no indutor  $L_2$  é maior que a corrente de carga, segundo a Fig. 7.11. Esses instantes podem ser obtidos a partir de (7.83) e (7.84), respectivamente.

$$t_2 = \frac{t_{on} (I_o - I_{L2(\text{mín.})})}{I_{L2(\text{máx.})} - I_{L2(\text{mín.})}} \quad (7.109)$$

$$t_3 = \frac{t_d (I_{L2(\text{máx.})} - I_o)}{I_{L2(\text{máx.})} - I_{L2(\text{mín.})}} \quad (7.110)$$

Assim, a quantidade de carga armazenada no capacitor  $C_2$  é:

$$\Delta Q_2 = \frac{[(t_{on} - t_2) + t_3] (I_{L2(\text{máx.})} - I_o)}{2} \quad (7.111)$$

Substituindo-se (7.16), (7.74), (7.89), (7.90), (7.109) e (7.110) em (7.111), tem-se:

$$\Delta Q_2 = \frac{V_i D^2 (V_i + V_o) [D(V_i + V_o) - 2V_o]^2}{8L_2 V_o^3 f_s^2} \quad (7.112)$$

A expressão para o cálculo da capacitância  $C_2$  é finalmente obtida substituindo-se (7.112) em (7.47):

$$C_2 = \frac{V_i D^2 (V_i + V_o) [D(V_i + V_o) - 2V_o]^2}{8L_2 V_o^3 f_s^2 \Delta V_{C2}} \quad (7.113)$$

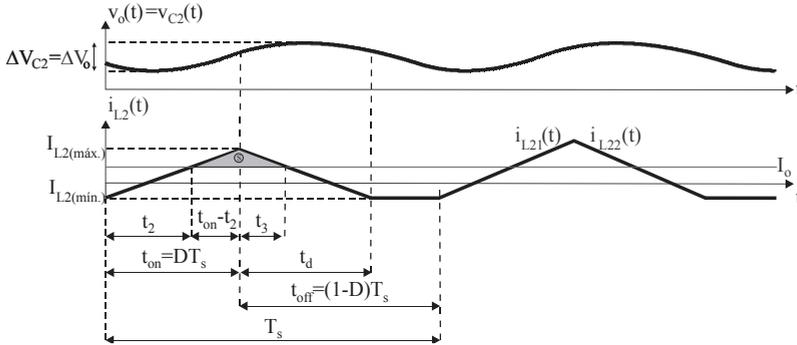


Fig. 7.11 – Formas de onda da corrente no indutor  $L_2$  e tensão no capacitor  $C_2$ , evidenciando os intervalos nos quais o capacitor  $C_2$  se carrega e descarrega no conversor Zeta em MCD

### 7.2.5 - Determinação dos esforços de corrente e tensão nos elementos semicondutores

As formas de onda da corrente e tensão instantâneas da Fig. 7.8 permitem obter os esforços de corrente e tensão nos elementos semicondutores. Assim, as correntes média e eficaz no interruptor  $S$  são dadas por:

$$I_{S(\text{méd.})} = \frac{1}{T_s} \int_0^{t_{on}} [i_{L11}(t) + i_{L21}(t)] dt \quad (7.114)$$

$$I_{S(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{t_{on}} [i_{L11}(t) + i_{L21}(t)]^2 dt} \quad (7.115)$$

Substituindo (7.75) e (7.83) em (7.114) e (7.115), têm-se:

$$I_{S(\text{méd.})} = \frac{D(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})}{2} \quad (7.116)$$

$$I_{S(\text{ef.})} = \frac{\sqrt{3D}(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})}{3} \quad (7.117)$$

Segundo a Fig. 7.7 (b), a tensão de bloqueio do interruptor é:

$$V_{S(\text{máx.})} = V_i - V_{L12} = V_i + V_o \quad (7.118)$$

De forma análoga, as correntes média e eficaz no diodo são dadas por:

$$I_{D(\text{méd.})} = \frac{1}{T_s} \int_0^{t_d} [i_{L12}(t) + i_{L22}(t)] dt \quad (7.119)$$

$$I_{D(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{t_d} [i_{L12}(t) + i_{L22}(t)]^2 dt} \quad (7.120)$$

Substituindo (7.74), (7.76) e (7.84) em (7.119) e (7.120), obtêm-se:

$$I_{D(\text{méd.})} = \frac{DV_i [2DV_i(L_1 + L_2) - L_1L_2f_s(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})]}{2L_1L_2V_of_s} \quad (7.121)$$

$$I_{D(\text{ef.})} = \sqrt{\frac{3D^3V_i^3(L_1 + L_2)^2 - 3D^2V_i^2f_sL_1L_2(L_1 + L_2)(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2}) + DV_if_s^2L_1^2L_2^2(\Delta I_{L1} + \Delta I_{L2})^2}{3V_oL_1^2L_2^2f_s^2}} \quad (7.122)$$

Analisando a Fig. 7.7 (a), verifica-se que a máxima tensão reversa no diodo é:

$$V_{D(\text{máx.})} = -(V_{L21} + V_o) = -(V_i + V_o) \quad (7.123)$$

É importante ressaltar que as expressões (7.116) a (7.118) e (7.121) a (7.123) podem ser utilizadas na determinação dos esforços nos elementos semicondutores dos conversores Ćuk, SEPIC e Zeta operando em MCD.



# 8

## MODELAGEM DE PEQUENOS SINAIS DE CONVERSORES CC-CC EMPREGANDO A TÉCNICA DO ESPAÇO DE ESTADOS MÉDIO

### 8.1 - Considerações iniciais

Na prática, os conversores estáticos de potência comportam-se como sistemas não lineares variantes no tempo. Dessa forma, a obtenção de um modelo exato capaz de representá-los adequadamente ao longo de toda a região de operação não é uma tarefa trivial.

A representação por meio de um modelo de pequenos sinais é possível, considerando que o conversor pode ser linearizado em um ponto de operação específico. Assim, é possível aplicar uma pequena variação ou perturbação na variável de entrada, que por sua vez provoca uma perturbação na variável de saída, a qual é devidamente linearizada.

Para essa finalidade, diversas abordagens podem ser utilizadas, como as técnicas de modelagem por espaço de estados médio e do interruptor PWM (do inglês, *pulse width modulation* – modulação por largura de pulso).

A modelagem por espaço de estados é amplamente utilizada, não apenas na representação de conversores estáticos, mas também em outras áreas completamente distintas da engenharia, como a economia. Embora seja uma ferramenta extremamente útil para essa finalidade, o grande número de manipulações matemáticas envolvendo matrizes em sistemas de ordem elevada pode implicar uma complexidade significativa.

### 8.1.2 - Descrição dos conversores CC-CC básicos no espaço de estados

Na técnica de modelagem por variáveis de estado, é utilizado um sistema linear representado na seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (8.2)$$

A expressão (8.1) consiste nas equações de estado, que correspondem a um conjunto de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem simultâneas contendo  $n$  variáveis, sendo que as  $n$  variáveis a serem determinadas são denominadas variáveis de estado.

A expressão (8.2) é chamada equação de saída, representando as variáveis de saída de um sistema na forma de combinações lineares das variáveis de estado e das entradas. Além disso, têm-se que  $A$  é a matriz de estados,  $B$  é a matriz de entrada,  $C$  é a matriz de saída,  $D$  é a matriz de transição direta,  $x$  é o vetor de estados,  $y$  é vetor de saída e  $u$  representa o vetor de entrada do sistema.

Os conversores CC-CC básicos não isolados em MCC, os quais foram apresentados nos capítulos anteriores, possuem dois estágios de operação, que dependem do estado de condução e bloqueio do interruptor. Ao longo de cada etapa, o circuito linearizado do conversor pode ser descrito por seu respectivo vetor de estados  $x$ , que é constituído pelas correntes nos indutores e tensões nos capacitores.

Para os conversores *buck*, *boost* e *buck-boost*, o vetor de estados é:

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Para os conversores *Ćuk*, *SEPIC* e *Zeta*, o vetor de estados é:

$$x = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \\ i_{L2} \\ v_{C2} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Assim, as expressões (8.3) e (8.4) estão associadas à representação de sistemas de segunda e quarta ordem, respectivamente.

Diante das premissas anteriores, para um conversor CC-CC de segunda ordem que possua duas etapas de operação, é possível escrever as equações de estado em (8.1) como:

$$\dot{x} = A_1x + B_1V_i \text{ para } [0, dT_s] \quad (8.5)$$

$$\dot{x} = A_2x + B_2V_i \text{ para } [0, (1-d)T_s] \quad (8.6)$$

Além disso, é conveniente apresentar as seguintes definições:

$$v_i = V_i + \tilde{v}_i \quad (8.7)$$

$$v_o = V_o + \tilde{v}_o \quad (8.8)$$

$$d = D + \tilde{d} \quad (8.9)$$

$$x = X + \tilde{x} \quad (8.10)$$

Sendo:

$V_i, V_o, D, X$  – valores médios da tensão de entrada, tensão de saída, razão cíclica e vetor de estados, respectivamente, associados à componente CC;

$\tilde{v}_i, \tilde{v}_o, \tilde{d}, \tilde{x}$  – perturbações de pequena amplitude aplicadas à tensão de entrada, tensão de saída, razão cíclica e vetor de estados, respectivamente, associadas à componente CA;

$v_i, v_o, d, x$  – soma das componentes CC e CA associadas à tensão de entrada, tensão de saída, razão cíclica e vetor de estados, respectivamente;

Considerando a variável de saída  $y$  como sendo a tensão de saída, é possível escrever as equações de saída dadas por (8.2) como:

$$v_o = C_1x \text{ para } [0, dT_s] \quad (8.11)$$

$$v_o = C_2x \text{ para } [0, (1-d)T_s] \quad (8.12)$$

Com o objetivo de determinar uma representação média do comportamento das variáveis envolvidas ao longo de um período de comutação, são representadas as seguintes equações associadas às etapas de operação do conversor:

$$\dot{x} = [A_1 d + A_2 (1-d)]x + [B_1 d + B_2 (1-d)]V_i \quad (8.13)$$

$$v_o = [C_1 d + C_2 (1-d)]x \quad (8.14)$$

## 8.2 - Obtenção da função de transferência que relaciona a tensão de saída frente a perturbações na razão cíclica

Quando se deseja verificar o comportamento da tensão de saída diante de perturbações na razão cíclica, outras perturbações podem ser desprezadas, como é o caso da componente alternada associada à tensão de entrada. Assim, a partir de (8.7), tem-se:

$$v_i = V_i \quad (8.15)$$

Substituindo as expressões (8.8) a (8.10) e (8.15) em (8.13), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{X} + \dot{\tilde{x}} = & A_1 [(X + \tilde{x})(D + \tilde{d})] + A_2 \{(X + \tilde{x})[1 - (D + \tilde{d})]\} \\ & + \{B_1 (D + \tilde{d}) + B_2 [1 - (D + \tilde{d})]\} V_i \end{aligned} \quad (8.16)$$

Em que  $\dot{X}$  e  $\dot{\tilde{x}}$  são as derivadas de  $X$  e  $\tilde{x}$ , respectivamente.

Como as componentes CA apresentam pequenas amplitudes, considera-se que os produtos entre duas perturbações são nulos, isto é:

$$\tilde{x}\tilde{d} = 0 \quad (8.17)$$

Além disso, considerando que a derivada de um valor constante é nula, é possível escrever:

$$\dot{X} = 0 \quad (8.18)$$

Substituindo (8.17) e (8.18) em (8.16), obtém-se a seguinte expressão simplificada:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = & [A_1D + A_2(1-D)](X + \tilde{x}) \\ & + [B_1D + B_2(1-D)]V_i + [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i]\tilde{d} \end{aligned} \quad (8.19)$$

É possível ainda definir os seguintes termos:

$$A = A_1D + A_2(1-D) \quad (8.20)$$

$$B = B_1D + B_2(1-D) \quad (8.21)$$

Logo, substituindo (8.20) e (8.21) em (8.19), obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}} = A(X + \tilde{x}) + BV_i + [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i]\tilde{d} \quad (8.22)$$

Para obter uma expressão apenas em termos de valores médios, deve-se considerar que todas as perturbações são nulas em (8.22), isto é,  $\tilde{x} = \dot{\tilde{x}} = \tilde{d} = 0$ , resultando em:

$$AX + BV_i = 0 \quad (8.23)$$

Como  $A$  e  $B$  são matrizes, o vetor  $X$  é obtido por:

$$X = -A^{-1}BV_i \quad (8.24)$$

Com o objetivo de obter apenas a componente alternada, substitui-se (8.23) em (8.22):

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i]\tilde{d} \quad (8.25)$$

Para obter os resultados referentes ao vetor de saída, deve-se substituir (8.8) a (8.10) e (8.15) em (8.14):

$$V_o + \tilde{v}_o = [C_1(D + \tilde{d}) + C_2(D + \tilde{d})]x \quad (8.26)$$

Repetindo o mesmo procedimento anterior, chega-se a:

$$V_o + \tilde{v}_o = C(X + \tilde{x}) + (C_1 - C_2)X\tilde{d} \quad (8.27)$$

Sendo que:

$$C = C_1D + C_2(1 - D) \quad (8.28)$$

As componentes CC e CA associadas a (8.27) são dadas por (8.29) e (8.30), respectivamente.

$$V_o = CX \quad (8.29)$$

$$\tilde{v}_o = C\tilde{x} + (C_1 - C_2)X\tilde{d} \quad (8.30)$$

A partir de (8.29), tem-se:

$$X = C^{-1}V_o \quad (8.31)$$

Igualando (8.24) e (8.31), é possível obter a característica estática do conversor como sendo dada por:

$$\frac{V_o}{V_i} = -CA^{-1}B \quad (8.32)$$

Por fim, é possível aplicar a transformada de Laplace a (8.25), resultando em:

$$sx(s) = Ax(s) + [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i]d(s) \quad (8.33)$$

Sendo que  $x(s)$  e  $d(s)$  são as representações de  $\tilde{x}$  e  $\tilde{d}$  no domínio da frequência, respectivamente.

Como a expressão (8.33) se trata de uma representação matricial, é possível escrevê-la da seguinte forma:

$$(sI - A)x(s) = [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i]d(s) \quad (8.34)$$

Sendo que  $I$  é a matriz identidade.

Rearranjando (8.34), tem-se:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i]d(s) \quad (8.35)$$

Analogamente, aplica-se a transformada de Laplace a (8.30):

$$v_o(s) = Cx(s) + (C_1 - C_2)Xd(s) \quad (8.36)$$

Sendo  $v_o(s)$  a representação de  $\tilde{v}_o$  no domínio da frequência.

Substituindo (8.35) em (8.36) e rearranjando o resultado, tem-se:

$$\frac{v_o(s)}{d(s)} = C(sI - A)^{-1} [(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)V_i] + (C_1 - C_2)X \quad (8.37)$$

Assim, deve-se ressaltar que para determinar a função de transferência de um dado conversor CC-CC, é necessário conhecer as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , bem como o vetor  $X$  que contém os valores médios das variáveis de estado.

### 8.3 - Obtenção da função de transferência que relaciona a tensão de saída frente a perturbações na tensão de entrada

Para determinar o comportamento da tensão de saída considerando pequenas perturbações na tensão de entrada, é necessário desprezar outras perturbações, como é o caso da razão cíclica. Logo, a partir de (8.9) tem-se:

$$d = D \quad (8.38)$$

Substituindo as expressões (8.7), (8.8), (8.10) e (8.38) em (8.13) e considerando (8.18), obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}} = A_1 D(X + \tilde{x}) + A_2 (1 - D)(X + \tilde{x}) + B_1 D(V_i + \tilde{v}_i) + B_2 (1 - D)(V_i + \tilde{v}_i) \quad (8.39)$$

Considerando as igualdades estabelecidas em (8.20) e (8.21), é possível escrever (8.39) da seguinte forma:

$$\dot{\tilde{x}} = A(X + \tilde{x}) + B(V_i + \tilde{v}_i) \quad (8.40)$$

A fim de determinar a componente CC, deve-se adotar  $\tilde{x} = \tilde{v}_i = 0$  em (8.40), resultando em:

$$AX + BV_i = 0 \quad (8.41)$$

Assim, o vetor  $X$  é dado por:

$$X = -A^{-1}BV_i \quad (8.42)$$

A componente CA é obtida substituindo-se (8.41) em (8.40):

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + BV_i \quad (8.43)$$

Substituindo (8.8), (8.10) e (8.38) em (8.14), chega-se a:

$$V_o + \tilde{v}_o = [C_1 D + C_2 (1 - D)](X + \tilde{x}) \quad (8.44)$$

Considerando a igualdade estabelecida por (8.28) associada a (8.44), tem-se:

$$V_o + \tilde{v}_o = C(X + \tilde{x}) \quad (8.45)$$

A componente CC de (8.45) é obtida considerando  $\tilde{v}_o = \tilde{x} = 0$ , isto é:

$$V_o = CX \quad (8.46)$$

Além disso, a componente CA de (8.45) é dada por:

$$\tilde{v}_o = C\tilde{x} \quad (8.47)$$

Assim, o vetor  $X$  é representado a partir de (8.46):

$$X = C^{-1}V_o \quad (8.48)$$

Igualando (8.42) e (8.48), tem-se:

$$\frac{V_o}{V_i} = -CA^{-1}B \quad (8.49)$$

Deve-se ressaltar que o resultado obtido em (8.49) é exatamente idêntico àquele fornecido por (8.32). Assim, é possível determinar o ganho estático do conversor por meio das duas expressões em questão.

Então, aplica-se a transformada de Laplace a (8.43), resultando em:

$$sX(s) = AX(s) + Bv_i(s) \quad (8.50)$$

Sendo que  $v_i(s)$  é a representação de  $\tilde{v}_i$  no domínio da frequência.

Analogamente ao procedimento realizado para (8.35), tem-se:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} B v_i(s) \quad (8.51)$$

Aplicando a transformada de Laplace a (8.47), tem-se:

$$v_o(s) = Cx(s) \quad (8.52)$$

Substituindo (8.51) em (8.52), finalmente obtém-se a expressão que relaciona a tensão de saída e a tensão de entrada:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = C \left[ (sI - A)^{-1} B \right] \quad (8.53)$$

Nesse caso, é necessário determinar a composição das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  associadas à operação do conversor CC-CC em regime permanente.

## 8.4 - Modelagem de um conversor CC-CC *buck* operando em MCC

### 8.4.1 - Obtenção do ganho estático e da função de transferência $v_o(s)/d(s)$

Como exemplo de aplicação da técnica de modelagem por espaço de estados médio, considere o conversor CC-CC *buck* mostrado na Fig. 8.1. Nesse caso, há dois elementos parasitas no circuito: as resistências série do indutor e do capacitor, representadas por  $R_L$  e  $R_{SE}$ , respectivamente.

Os circuitos equivalentes da Fig. 8.2 representam a operação do conversor *buck* em MCC. Além disso, constata-se que  $x_1$  e  $x_2$  correspondem às variáveis de estado do sistema.

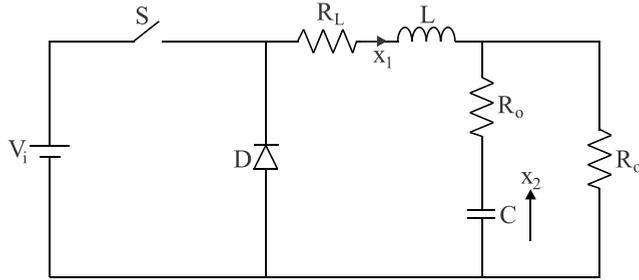
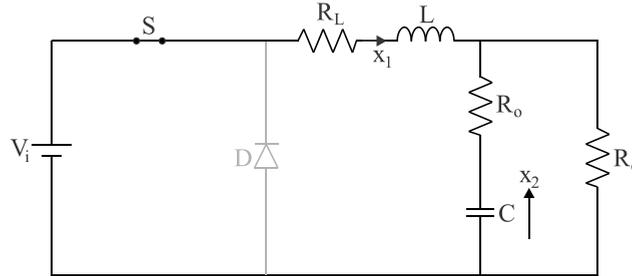
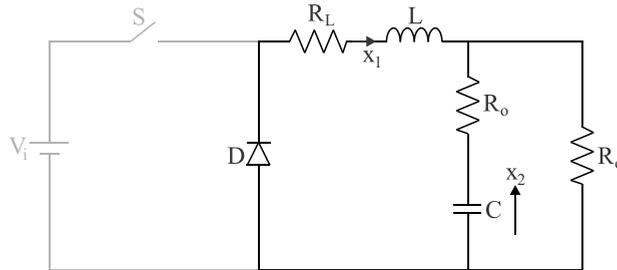


Fig. 8.1 – Conversor CC-CC *buck* considerando não idealidades associadas ao indutor e ao capacitor



(a) 1ª etapa  $[0, t_{on}]$



(b) 2ª etapa  $[t_{on}, T_s]$

Fig. 8.2 – Etapas de operação de um conversor CC-CC *buck* em MCC

Para obter o ganho estático e a função de transferência que relaciona a tensão de saída frente a variações da razão cíclica do conversor *buck*, é necessário considerar inicialmente as expressões que definem o comportamento da tensão no indutor e da corrente no capacitor na Fig. 8.1.

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \tag{8.54}$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \tag{8.55}$$

Considerando a malha externa da Fig. 8.2 (a) composta por  $V_i$ ,  $R_L$ ,  $L$  e  $R_o$  e adotando o sentido anti-horário para a análise, tem-se:

$$-V_i + v_L + R_L i_L + R_o i_R = 0 \quad (8.56)$$

A seguinte expressão ainda pode ser obtida para o circuito:

$$i_R = i_L - i_C \quad (8.57)$$

Substituindo (8.54), (8.55) e (8.57) em (8.56), tem-se:

$$-V_i + L \frac{di_L}{dt} + (R_L + R_o) i_L - R_o C_o \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad (8.58)$$

Considerando que as variáveis de estado são a corrente no indutor e a tensão no capacitor, as seguintes expressões são obtidas:

$$x_1 = i_L \quad (8.59)$$

$$x_2 = v_C \quad (8.60)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{di_L}{dt} \quad (8.61)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dv_C}{dt} \quad (8.62)$$

Substituindo (8.59) a (8.62) em (8.58), tem-se:

$$L\dot{x}_1 + (R_L + R_o)x_1 - R_o C_o \dot{x}_2 - V_i = 0 \quad (8.63)$$

Ao analisar a malha da Fig. 8.2 (a) composta por  $C_o$ ,  $R_o$  e  $R_{SE}$ , as seguintes expressões são obtidas:

$$v_C + v_{RSE} = v_{Ro} \quad (8.64)$$

$$v_{Ro} = R_o (i_L - i_C) \quad (8.65)$$

$$v_{RSE} = R_{SE} i_C \quad (8.66)$$

Substituindo-se (8.55), (8.65), (8.66) em (8.64), obtém-se:

$$v_C + R_{SE} C_o \frac{dv_C}{dt} = R_o \left( i_L - C_o \frac{dv_C}{dt} \right) \quad (8.67)$$

Essa expressão pode ser escrita em termos das variáveis de estado a partir da substituição de (8.59) a (8.62) em (8.67):

$$R_o x_1 - x_2 - C_o (R_o + R_{SE}) \dot{x}_2 = 0 \quad (8.68)$$

Assim, as expressões (8.63) e (8.68) tornam-se:

$$\dot{x}_1 = \left[ \frac{-(R_L + R_o)}{L} \right] x_1 + \left( \frac{R_o C_o}{L} \right) \dot{x}_2 + \left( \frac{V_i}{L} \right) \quad (8.69)$$

$$\dot{x}_2 = \left[ \frac{R_o}{C_o (R_o + R_{SE})} \right] x_1 + \left[ \frac{-1}{C_o (R_o + R_{SE})} \right] x_2 \quad (8.70)$$

Substituindo-se (8.70) em (8.69), tem-se:

$$\dot{x}_1 = \left[ \frac{-(R_L R_o + R_L R_{SE} + R_o R_{SE})}{L (R_o + R_{SE})} \right] x_1 + \left( \frac{-R_o}{L (R_o + R_{SE})} \right) x_2 + \left( \frac{V_i}{L} \right) \quad (8.71)$$

Comparando a representação matricial de (8.5) com (8.70) e (8.71), a seguinte representação pode ser obtida:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8.72)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-(R_L R_o + R_L R_{SE} + R_o R_{SE})}{L (R_o + R_{SE})} & \frac{-R_o}{L (R_o + R_{SE})} \\ \frac{R_o}{C_o (R_o + R_{SE})} & \frac{-1}{C_o (R_o + R_{SE})} \end{bmatrix} \quad (8.73)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.74)$$

A análise da segunda etapa de operação na Fig. 8.2 (b) em que o interruptor encontra-se bloqueado é bastante simples, bastando considerar  $V_i = 0$ . Assim, não é necessário realizar todo o procedimento anterior novamente.

Portanto, a partir da expressão (8.6), chega-se à seguinte representação matricial:

$$A_2 = A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-(R_L R_o + R_L R_{SE} + R_o R_{SE})}{L(R_o + R_{SE})} & \frac{-R_o}{L(R_o + R_{SE})} \\ \frac{R_o}{C_o(R_o + R_{SE})} & \frac{-1}{C_o(R_o + R_{SE})} \end{bmatrix} \quad (8.75)$$

$$B_2 = 0 \quad (8.76)$$

A tensão de saída para o interruptor em condução ou bloqueado é:

$$v_o = v_{R_o} = R_o (i_L - i_C) = R_o (x_1 - C\dot{x}_2) \quad (8.77)$$

Substituindo (8.70) em (8.77), é possível rearranjar a expressão resultante da seguinte forma:

$$v_o = \frac{R_o R_{SE}}{R_o + R_{SE}} x_1 + \frac{R_o}{R_o + R_{SE}} x_2 \quad (8.78)$$

Comparando (8.78) com as representações matriciais de (8.11) e (8.12), obtém-se:

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} \frac{R_o R_{SE}}{R_o + R_{SE}} & \frac{R_o}{R_o + R_{SE}} \end{bmatrix} \quad (8.79)$$

Assim, as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são obtidas a partir da substituição de (8.73) e (8.75) em (8.20); (8.74) e (8.76) em (8.21); bem como (8.79) em (8.28), respectivamente:

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-(R_L R_o + R_L R_{SE} + R_o R_{SE})}{L(R_o + R_{SE})} & \frac{-R_o}{L(R_o + R_{SE})} \\ \frac{R_o}{C_o(R_o + R_{SE})} & \frac{-1}{C_o(R_o + R_{SE})} \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

$$B = B_1 D = \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} D \quad (8.81)$$

$$C = C_1 = \begin{bmatrix} \frac{R_o R_{SE}}{R_o + R_{SE}} & \frac{R_o}{R_o + R_{SE}} \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

Substituindo (8.80) a (8.82) em (8.32), é possível representar o ganho estático do conversor *buck* em MCC:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{DR_o}{R_L + R_o} \quad (8.83)$$

Ao contrário do que ocorre no conversor ideal, tanto a resistência de carga quanto a resistência série afetam o ganho estático na prática. No entanto, a influência de  $R_L$  pode ser praticamente desprezada, tendo em vista que o valor dessa resistência normalmente é pequeno. Considerando  $R_L = 0$  em (8.83), o ganho estático passa a depender unicamente da razão cíclica.

Os elementos do vetor  $X$  no conversor *buck* são dados por:

$$X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} \quad (8.84)$$

Além disso, têm-se:

$$I_L = I_o = \frac{V_o}{R_o} = \frac{DV_i}{R_o} \quad (8.85)$$

$$V_C = V_o = DV_i \quad (8.86)$$

Logo, é possível escrever a seguinte expressão:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{DV_i}{R_o} \\ DV_i \end{bmatrix} \quad (8.87)$$

Substituindo (8.73), (8.74), (8.75), (8.76), (8.79), (8.80), (8.82) e (8.87) em (8.37), chega-se finalmente a:

$$\frac{v_o(s)}{d(s)} = \frac{s(R_o^2 R_{SE} C_o V_i) + [R_o V_i (R_o + R_{SE})]}{s^2 [R_o C_o L (R_o + R_{SE})] + s (R_o + R_{SE}) [R_o C_o (R_{SE} + R_L) + L] + [(R_o + R_{SE})(R_o + R_{SE} + R_L)]} \quad (8.88)$$

### 8.5.2 - Obtenção da função de transferência $v_o(s)/v_i(s)$

Para determinar a função de transferência que relaciona a tensão de saída diante de perturbações na tensão de entrada, é preciso realizar o mesmo procedimento anterior, que compreende a obtenção das expressões (8.54) a (8.82). Essa demonstração não será representada por questões de simplicidade.

Assim, é possível deduzir essa função de transferência substituindo (8.80) a (8.82) em (8.53), o que resulta em:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{DR_o [sR_{SE} + 1]}{s^2 [C_o L (R_o + R_{SE})] + s \{C_o [R_L (R_o + R_{SE}) + R_o R_{SE}] + L\} + (R_o + R_L)} \quad (8.89)$$