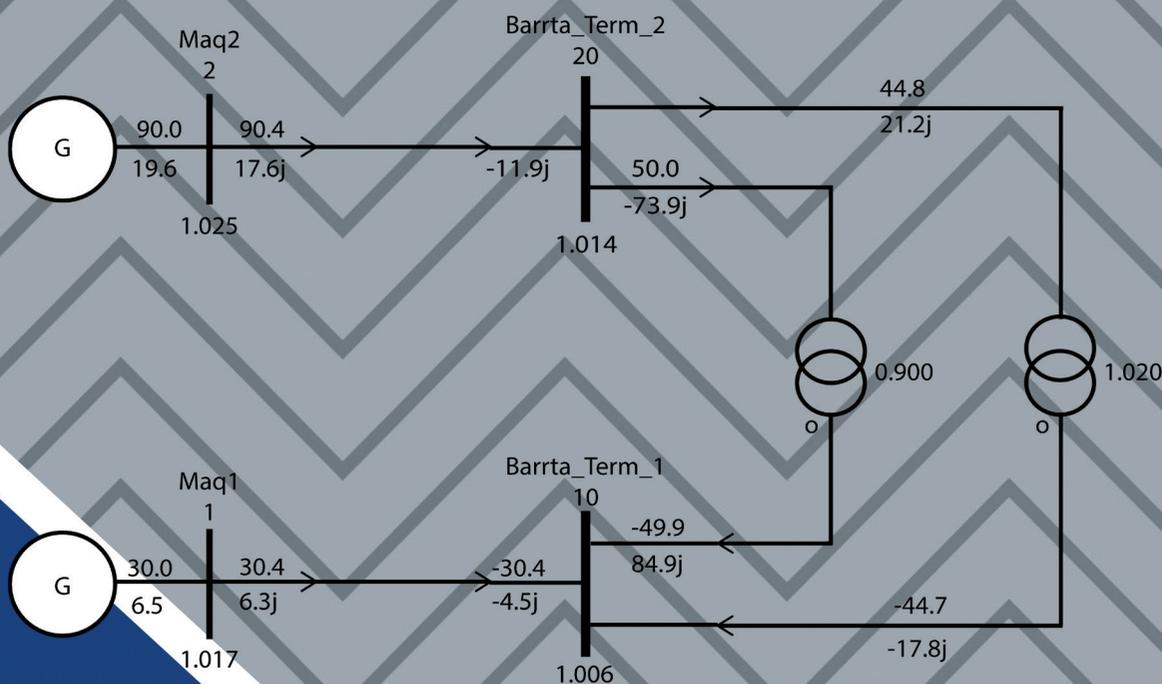


ENGENHARIA DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

# ANÁLISE DE FLUXO DE CARGA EM SISTEMAS DE POTÊNCIA



Ailson P. de Moura

Adriano Aron F. de Moura

Ednardo P. da Rocha

**Artliber**  
EDITORA

Ailson P. de Moura  
Adriano Aron F. de Moura  
Ednardo P. da Rocha

ENGENHARIA DE  
SISTEMAS DE POTÊNCIA

---

**ANÁLISE DE  
FLUXO DE CARGA EM  
SISTEMAS DE POTÊNCIA**

**Artliber**  
EDITORA

Copyright© 2018 by Artliber Editora Ltda.

Composição eletrônica e Capa:

*Perfil Editorial*

Revisão:

*Maria Carolina C. Garcia*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

M654e Moura, Ailson P. de  
1.ed. Análise de Fluxo de Carga em Sistemas de Potência: Engenharia de  
Sistemas de Potência / Ailson P. de Moura/Adriano Aron F. de Moura/  
Ednardo P. da Rocha. - 1.ed. - São Paulo: Artliber Editora, 2018.  
312 p.; il.; 17 x 24 cm.

Inclui bibliografia.  
ISBN: 978-85-88098-83-1

1. Engenharia elétrica 2. Exercício - fluxo de carga. 3. Sistema de po-  
tência. I. Moura, Adriano Aron F. de. II. Rocha, Ednardo P. da. III. Título.

CDD-621.3

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Engenharia elétrica: sistema de potência
2. Exercício: fluxo de carga

2018

Todos os direitos desta edição reservados à

**Artliber Editora Ltda.**

Av. Diógenes Ribeiro de Lima, 3.294

05083-010 - São Paulo - SP - Brasil

Tel.: (11) 3641-3893 - 3832-5489

info@artliber.com.br

www.artliber.com.br

# Sumário

<b>Capítulo 1 – Aspectos Gerais do Fluxo de Carga e Programa ANAREDE .....</b>	<b>13</b>
1.1 – Introdução .....	13
1.2 – Breve histórico .....	14
1.3 – Objetivo de um fluxo de potência .....	18
1.3.1 – Horário de ponta (P) .....	20
1.3.2 – Horário fora de ponta (F).....	21
1.4 – Utilidade de um fluxo de potência.....	23
1.5 – Dados do SEP .....	24
1.6 – Introdução ao ANAREDE .....	31
1.7 – Descrição da barra de ferramentas .....	35
1.8 – Principais ferramentas de manipulação gráfica para o “ajuste fino” do diagrama .....	35
1.9 – Inserindo elementos de rede.....	39
1.10 – Inserindo os dados da barra .....	40
1.11 – Inserindo os dados da linha.....	44
1.12 – Inserindo os dados dos transformadores e CSC.....	47

1.13 – Desenhando um novo diagrama.....	50
1.14 – Exercícios .....	65
Bibliografia .....	72
<b>Capítulo 2 – Modelos Usados no Fluxo de Carga Não Linear .....</b>	<b>73</b>
2.1 – Introdução.....	73
2.2 – Suposições e aproximações.....	73
2.3 – Modelos de componentes .....	74
2.3.1 – Geradores.....	75
2.3.2 – Cargas .....	76
2.3.3 – Linhas de transmissão.....	76
2.3.4 – Linhas de distribuição .....	77
2.3.5 – Transformadores em fase e defasadores .....	78
2.3.6 – Capacitores ou reatores <i>shunt</i> .....	79
2.3.7 – Compensador síncrono.....	81
2.3.8 – Transformadores de três enrolamentos .....	81
2.4 – Modelo de admitância e cálculo matricial de redes .....	83
2.4.1 – Montagem da matriz de admitância por inspeção.....	89
2.5 – Inclusão de transformadores com regulação de tensão na matriz de admitâncias .....	94
2.6 – Motor de indução.....	100
2.7 – Formulação matemática do problema.....	101
2.8 – Exercícios .....	112
Bibliografia .....	121
<b>Capítulo 3 – Métodos de Gauss e Gauss-Seidel .....</b>	<b>123</b>
3.1 – Introdução.....	123
3.2 – Métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel .....	123
3.3 – Aplicação do Método de Gauss-Seidel ao problema do fluxo de potência .	130
3.3.1 – Aspectos computacionais do método de Gauss-Seidel de fluxo de carga	143
3.4 – Exercícios .....	144
Bibliografia .....	148

<b>Capítulo 4 – Métodos Iterativos de Newton-Raphson.....</b>	<b>149</b>
4.1 – Introdução .....	149
4.2 – Método de Newton para uma equação não linear .....	149
4.3 – Método de Newton-Raphson para um sistema de equações não lineares ...	151
4.4 – Aplicação do método de Newton-Raphson ao problema do fluxo de potência – Formulação em coordenadas cartesianas.....	155
4.5 – Aplicação do método de Newton-Raphson ao problema do fluxo de potência – Formulação em coordenadas polares .....	162
4.5.1 – Elementos da matriz jacobiana.....	168
4.5.2 – Aspectos computacionais do método de Newton-Raphson .....	194
4.6 – Exercícios.....	195
Bibliografia .....	197
<b>Capítulo 5 – Métodos Desacoplados do Fluxo de Carga .....</b>	<b>198</b>
5.1 – Introdução .....	198
5.2 – Métodos desacoplados.....	198
5.3 – Aspectos computacionais do método desacoplado rápido.....	225
5.4 – Versão BX.....	227
5.5 – Exercícios .....	227
Bibliografia .....	231
<b>Capítulo 6 – Ajustes, Controles Automáticos e Cálculo Não Iterativo em Fluxo de Carga.....</b>	<b>233</b>
6.1 – Introdução .....	233
6.2 – Ajustes e controles .....	233
6.2.1 – Incorporação do ajuste diretamente no modelo de fluxo de potência .....	234
6.2.2 – Incorporação do ajuste por meio da lógica de realimentação .....	236
6.2.2.1 – Controle do módulo de tensão em barras PQ, por meio de tapes em fase de transformadores.....	237
6.2.2.2 – Controle do fluxo de potência ativa em linhas, por meio de tapes em quadratura de transformadores.....	246
6.2.2.3 – Controle do módulo de tensão em barras PV .....	248

6.3 – Cálculo dos fluxos de potência nas linhas, perdas e potências geradas .....	252
6.3.1 – Cálculo dos fluxos de potência ativa e reativa nos ramos.....	252
6.3.2 – Cálculo das perdas de potência ativa e reativa nos ramos .....	262
6.3.3 – Cálculo das potências ativas e reativas geradas .....	264
6.4 – Exercícios.....	265
Bibliografia .....	275
<b>Capítulo 7 – Fluxo de Carga Linear .....</b>	<b>277</b>
7.1 – Introdução.....	277
7.2 – Fluxo de potência CC.....	277
7.3 – Utilidade do fluxo de potência CC .....	278
7.4 – Desenvolvimento do fluxo de potência CC.....	279
7.4.1 – Formulação matricial.....	280
7.5 – Aspectos computacionais do fluxo de potência CC .....	285
7.6 – Exercícios .....	285
Bibliografia .....	286
<b>Capítulo 8 – Fluxo de Potência Linear V-Teta .....</b>	<b>287</b>
8.1 – Introdução.....	287
8.2 – Desenvolvimento do fluxo de potência linear V-Teta .....	288
8.3 – Desenvolvimento das equações linearizadas de $\Delta P$ e $\Delta Q$ , com os ângulos das tensões como incógnitas.....	292
8.4 – Demonstração da obtenção dos elementos das matrizes $[J1]^{LN}$ e $[J3]^{LN}$ , do método de fluxo de carga linear V-Teta .....	295
8.5 – Desenvolvimento das equações linearizadas de $\Delta P$ e $\Delta Q$ , com os módulos das tensões como incógnitas.....	297
8.6 – Demonstração da obtenção dos elementos das matrizes $[J2]^{LN}$ e $[J4]^{LN}$ , do método de fluxo de carga linear V-Teta.....	300
8.7 – Solução do sistema superdeterminado de equações lineares.....	302
Bibliografia .....	310

## Métodos de Gauss e Gauss-Seidel

### 3.1 – Introdução

Conforme visto no capítulo 1, ao longo dos anos surgiram vários métodos de fluxo de carga ou fluxo de potência. Um dos primeiros foi o de Gauss/Gauss-Seidel ou Gauss-Jacobi/Gauss-Seidel, caracterizado pela simplicidade e facilidade de programação. No entanto, ele normalmente requer várias iterações para alcançar a convergência.

Este capítulo apresenta o método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel usando a formulação matemática original e fazendo aplicação destas técnicas numéricas ao problema do fluxo de carga.

### 3.2 Métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

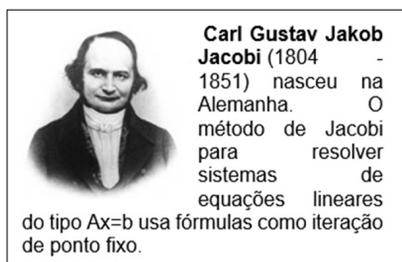


Figura 3.1 – Jacobi



Onde:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no de Gauss-Seidel o sistema linear  $[A]\mathbf{x}=[b]$  é escrito na forma equivalente  $\mathbf{x}=[C]\mathbf{x}+[g]$ , por separação da diagonal. No entanto, no momento de se calcular o valor  $x_j^{(k+1)}$ , são considerados todos os valores  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$  mais atualizados, que já foram calculados, e os valores restantes  $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ .

A formulação matemática de sistemas não lineares é feita de maneira semelhante àquela de sistemas lineares.

O exemplo numérico 3.1 esclarece os métodos citados, usando um sistema não linear de equações.

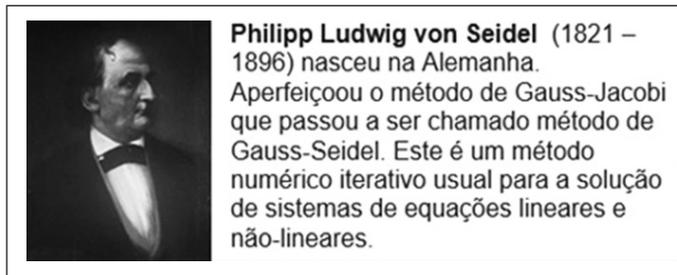


Figura 3.3 – Seidel

**Exemplo 3.1**

Considerando o sistema de equações não lineares:  $\begin{cases} 2x_1 + x_1x_2 = 1 \\ 2x_2 - x_1x_2 = -1 \end{cases}$ ,

encontre a solução do sistema usando os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. A estimativa inicial é um vetor nulo, enquanto a tolerância para convergência é de 0,00001.

**Solução:****Método de Gauss-Jacobi**

Colocação do sistema na forma para a solução de Gauss-Jacobi :

$$\begin{cases} x_1 = 0.5 - \frac{x_1x_2}{2} \\ x_2 = -0.5 + \frac{x_1x_2}{2} \end{cases}$$

1) Estimativas iniciais:  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$

2) Iteração 1 – substituindo-se os valores das estimativas iniciais, vem

$$x_1^{(1)} = 0.5 - 0 = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = -0.5 + 0 = -0.5$$

3) Iteração 2 – substituindo-se os valores da iteração 1

$$x_1^{(2)} = 0.5 - \frac{0.5x(-0.5)}{2} = 0.625$$

$$x_2^{(2)} = -0.5 + \frac{0.5x(-0.5)}{2} = -0.625$$

4) Iteração 3 – substituindo-se os valores da iteração 2

$$x_1^{(3)} = 0.5 - \frac{0.625x(-0.625)}{2} = 0.6953$$

$$x_2^{(3)} = -0.5 + \frac{0.625x(-0.625)}{2} = -0.6953$$

Substituindo-se as raízes no sistema de equações, os resíduos são:

$$f(x_1, x_2) = 0.9072$$

$$f(x_2, x_1) = -0.9072$$

O processo continua e uma rotina em linguagem MATLAB foi usada para calcular as iterações seguintes.

Rotina para resolver o sistema não linear pelo método de Gauss-Jacobi::

```
%Gauss-Jacobi
%2*x1+x1*x2=1
%2*x2-x1*x2=-1
clear all;
clc;
x1=0;
x2=0;
x1_ant=x1;
x2_ant=x2;
n=0;
while 1
    x1=0.5-x1_ant*x2_ant/2;
    x2=-0.5+x1_ant*x2_ant/2;
    if abs(x1-x1_ant)<0.00001 & abs(x2-x2_ant)<0.00001
        break;
    end
    x1_ant=x1;
    x2_ant=x2;
    n=n+1
end
```

solucao1=x1

solucao2=x2

n = 440

solucao1 = 0.9955

residuo1 = 9.9706e-06

solucao2 = -0.9955

residuo2 = 9.9706e-06

### Método de Gauss-Seidel

1) Estimativas iniciais:  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$

2) Iteração 1 - substituindo-se os valores das estimativas iniciais, vem

$$x_1^{(1)} = 0.5 - 0 = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = -0.5 + 0 = -0.5$$

3) Iteração 2 - substituindo-se os valores da iteração 1

$$x_1^{(2)} = 0.5 - \frac{0.5x(-0.5)}{2} = 0.625$$

$$x_2^{(2)} = -0.5 + \frac{0.5x(-0.625)}{2} = -0.6563$$

4) Iteração 3 - substituindo-se os valores da iteração 2

$$x_1^{(3)} = 0.5 - \frac{0.625x(-0.6563)}{2} = 0.7051$$

$$x_2^{(3)} = -0.5 + \frac{0.7051x(-0.6563)}{2} = -0.7314$$

Substituindo-se as raízes no sistema de equações, os resíduos são:

$$f(x_1, x_2) = 0.8945$$

$$f(x_2, x_1) = -0.9471$$

O processo continua e uma rotina em linguagem MATLAB foi usada para calcular as seguintes

Rotina para resolver o sistema não linear pelo método de Gauss-Seidel

```
%Gauss-Seidel
%2*x1+x1*x2=1
%2*x2-x1*x2=-1
clear all;
clc;
x1=0;
x2=0;
x1_ant=x1;
x2_ant=x2;
n=0;
while 1
    x1=0.5-x1*x2/2;
    x2=-0.5+x1*x2/2;
    if abs(x1-x1_ant)<0.00001 & abs(x2-x2_ant)<0.00001
        break;
    end
    x1_ant=x1;
    x2_ant=x2;
    n=n+1
end
solucao1=x1
solucao2=x2
n = 383
```

```

solucao1 = 0.9961
residuo1 = 9.9571e-06
solucao2 = -0.9961
residuo2 = 9.9314e-06

```

Comparando com os resultados anteriores, observa-se uma aceleração do processo de convergência. Ou seja, o método de Gauss-Seidel realiza  $n = 383$  iterações, enquanto no de Gauss-Jacobi  $n = 440$  iterações. Assim, o método de Gauss-Seidel apresenta uma convergência mais rápida.

### 3.3 – Aplicação do método de Gauss-Seidel ao problema do fluxo de potência

Quando um problema de engenharia é resolvido por meio de um método numérico, é preciso estar ciente de que as características desta técnica aparecerão na solução do problema. Por exemplo, se o método numérico apresenta muitas iterações para convergir, quando ele for aplicado na solução do problema de engenharia, esta solução também apresentará muitas iterações.

Além disso, as especificidades do problema de engenharia devem ser levadas em consideração. Por exemplo, o sistema de equações não lineares 3.5 não somente tem que ser resolvido matematicamente, mas também devem ser consideradas a existência de barras do tipo referência PV e PQ. Ou seja, a solução do problema de engenharia utiliza uma base matemática para a resolução de um sistema de equações não lineares, devendo incorporar as suas particularidades próprias. E isso pode tornar o problema mais difícil de ser solucionado.

O objetivo é resolver o sistema de equações 3.5, mostrado a seguir na forma compacta, aplicando o método de Gauss-Seidel.

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k = \frac{(S_i^G - S_i^C)^*}{V_i^*} \quad (3.5)$$

Com  $(i = 1, 2, \dots, N)$ , sendo  $N$  o número de barras do SEP e:

$$S_i^G - S_i^C = S_i = P_i + jQ_i \quad (3.6)$$

Onde:

$P_i$  : potência ativa injetada na barra  $i$  do SEP

$Q_i$  : potência reativa injetada na barra  $i$  do SEP

Substituindo a equação 3.6 na 3.5, temos:

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (3.7)$$

Com ( $i = 1, 2, \dots, N$ )

Ao retirar do somatório a variável de interesse, ou seja  $V_i$ , tem-se:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N Y_{ik} V_k + Y_{ii} V_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (3.8)$$

Isolando no primeiro membro a variável de interesse, vem:

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left( \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N Y_{ik} V_k \right) \quad (3.9)$$

Com ( $i = 1, 2, \dots, N$ )

Os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel utilizam iterativamente as equações 3.9 para calcular as tensões nas barras de um SEP. Basicamente, o esquema iterativo desses métodos é o seguinte: parte-se de valores estimados inicialmente, de  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Estes valores são substituídos no segundo membro das equações 3.9, para o cálculo de novos valores de  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Este processo é repetido usando-se agora os valores recém-calculados como ponto de partida, até que a convergência do processo seja obtida.

A aplicação dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao problema do fluxo de potência, além do método matemático, requer ainda as considerações do problema de engenharia.

Ou seja, o sistema de equações 3.5 somente é possível e determinado com as considerações feitas anteriormente, que resultaram na definição das barras do tipo referência (PV e PQ). Assim, tendo em vista a classificação das barras do SEP, podemos fazer as seguintes considerações:

- Na barra de referência, o valor da tensão em módulo e ângulo é conhecido. Assim, não é necessário fazer cálculos usando a equação 3.9. Se o SEP tem N barras, ficam então N-1 equações e N-1 incógnitas. Para facilitar a notação, é assumido que a barra de referência é a barra número 1 no SEP.
- Nas barras de carga (do tipo PQ), tanto o módulo como o ângulo da tensão são desconhecidos. As variáveis especificadas nelas são as potências geradas (ativa e reativa). A equação 3.9 para essas barras pode, então, ser escrita conforme a seguir, com as potências ativa e reativa ganhando o superíndice de *esp* (especificada):

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left( \frac{P_i^{esp} - jQ_i^{esp}}{V_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N Y_{ik} V_k \right)$$

Onde:

I: números das barras de carga do SEP

- Nas barras de geração (do tipo PV), o módulo da tensão é conhecido  $|V_i^{esp}|$ , enquanto o ângulo de fase não. No entanto, neste tipo de barra a potência ativa gerada é especificada e a potência reativa gerada é desconhecida. Portanto, a cada iteração é necessário calcular um valor aproximado para a potência reativa gerada nas barras PV (valor diretamente relacionado com o perfil das tensões do SEP naquela iteração). Da equação básica da potência complexa, pode-se escrever que a potência reativa é a parte imaginária do produto  $V_i I_i^*$ :

$$Q_i = \text{Im}(V_i I_i^*) \quad (3.10)$$

Portanto:

$$Q_i = -\text{Im}(V_i^* I_i) \quad (3.11)$$

E como:

$$I_i = \sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k \quad (3.12)$$

O cálculo da potência reativa gerada fica da seguinte forma:

$$Q_i = Q_i^{\text{calculado}} = -\text{Im} \left( V_i^* \sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k \right) \quad (3.13)$$

O valor  $Q_i^{\text{calculado}}$ , para diferenciar do valor  $Q_i^{\text{esp}}$  das barras de carga, é substituído na equação 3.9:

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left( \frac{P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{calculado}}}{V_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N Y_{ik} V_k \right) \quad (3.14)$$

Na equação 3.14, são obtidos o módulo e o ângulo da tensão nas barras PV. No entanto, os módulos de tensão das barras PV já são especificados. Assim, deve ser executada a seguinte sequência de cálculos:

- 1) Calcular as potências  $Q_i^{\text{calculado}}$  usando a equação 3.13.
- 2) Calcular os módulos e os ângulos de tensão por meio da equação 3.14.
- 3) Racionalizar os valores das tensões nas barras PV. Para tanto, os módulos de tensão calculados no passo 2 são desprezados e substituídos pelos valores especificados em cada barra PV, mantendo-se os valores dos ângulos calculados.

$$V_i^{\text{rac}} = V_i^{\text{esp}} \angle \theta_i \quad (3.15)$$

O fluxograma para o método é mostrado na figura 3.4.

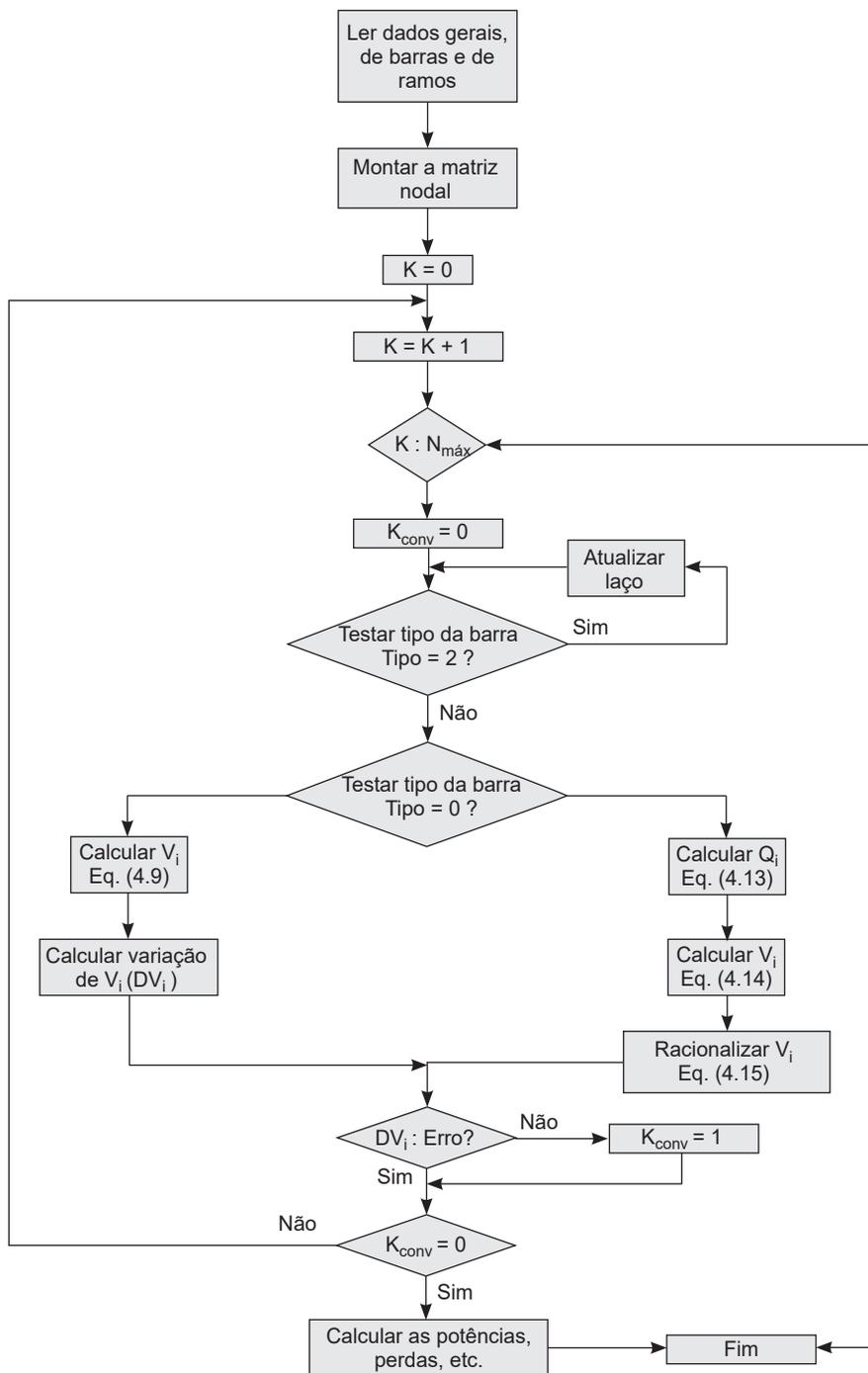


Figura 3.4 – Fluxograma para o método de Gauss-Seidel

No fluxograma acima, a variação dos módulos de tensão  $\Delta V_i$  é representada como  $DV_i$ . O tipo de barra é codificado conforme descrito no capítulo 1, item 1.5. O número da iteração é designado como  $K$  e o número máximo de iterações é  $N_{max}$ .

No método de fluxo de potência Gauss-Jacobi, todos os valores de tensão substituídos nas equações são os valores da iteração anterior. A esta técnica dá-se o nome de substituições simultâneas.

No método de Gauss-Seidel, assim que um valor é calculado, ele substitui o da iteração anterior. A esta técnica denomina-se substituição sucessiva.

O método de Gauss-Seidel é preferido em relação ao de Gauss-Jacobi, pois além de apresentar maior rapidez de convergência do que o outro, ele ainda economiza memória (não necessita do vetor com as tensões anteriores).

A seguir é apresentado um exemplo numérico para o método de Gauss-Seidel.

### Exemplo 3.2

Desenvolver a primeira iteração do método de Gauss-Seidel do sistema mostrado na figura 3.5.

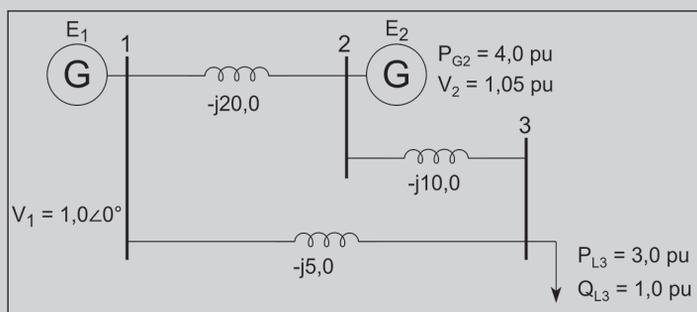


Figura 3.5 – Sistema do exemplo 3.2

### Solução:

Os dados são mostrados na figura 3.5. A barra 1 é de referência, enquanto as barras 2 e 3 são as barras PV e PQ, respectivamente. A tensão da barra 3 é iniciada com perfil plano ou *flat-start*, isto é, com  $1,0 \angle 0^\circ$ .

Os cálculos a seguir seguem o fluxograma apresentado na figura 3.4.

Cálculo dos elementos da matriz de admitâncias:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} -j25 & j20 & j5 \\ j20 & -j30 & j10 \\ j5 & j10 & -j15 \end{bmatrix}$$

Cálculo da tensão na barra 2.

1º Passo: Determinação da potência reativa. Usando a equação 3.13, temos:

$$\begin{aligned} Q_2^{\text{calculado}} &= -\text{Im}[V_2^*(Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3)] = \\ &= -\text{Im}[1,05\angle 0^\circ (j20 \times 1\angle 0^\circ - j30 \times 1,05\angle 0^\circ + j10 \times 1\angle 0^\circ)] = 1,575(\text{pu}) \end{aligned}$$

2º Passo: Determinação do módulo e ângulo da tensão. Pela equação 3.14, temos:

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[ \frac{P_2^{\text{esp}} - jQ_2^{\text{calculado}}}{V_2^*} - (Y_{21}V_1 + Y_{23}V_3) \right] = \frac{1}{-j30} \left[ \frac{4 - j1,575}{1,05\angle 0^\circ} - (j20 \times 1\angle 0^\circ + j10 \times 1\angle 0^\circ) \right]$$

$$V_2^{\text{rac}} = V_2^{\text{esp}} \angle \theta_2 = 1,05765 \angle 6,89^\circ \text{ (pu)}$$

3º Passo: Racionalização da tensão. De acordo com a equação 3.15, temos:

$$V_2^{\text{rac}} = V_2^{\text{esp}} \angle \theta_2 = 1,05 \angle 6,89^\circ \text{ (pu)}$$

Cálculo da tensão na barra 3. Usando a equação 3.14, temos:

$$V_3 = \frac{1}{Y_{33}} \left[ \frac{P_3^{\text{esp}} - jQ_3^{\text{esp}}}{V_3^*} - (Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2) \right] = \frac{1}{-j15} \left[ \frac{-3 + j1}{1,0\angle 0^\circ} - (j5 \times 1\angle 0^\circ + j10 \times 1,05 \angle 6,89^\circ) \right]$$

Observe que as potências na barra 3 são potências consumidas e, portanto, recebem sinais contrários às potências injetadas. A tensão na barra 2 é o valor mais atualizado. Logo:

$$V_3 = 0,9686 \angle -6,88^\circ \text{ (pu)}$$

### Exemplo 3.3

Usando o programa a seguir, escrito em MATLAB, determine e analise a solução para o sistema de potência seguinte, com nove barras.

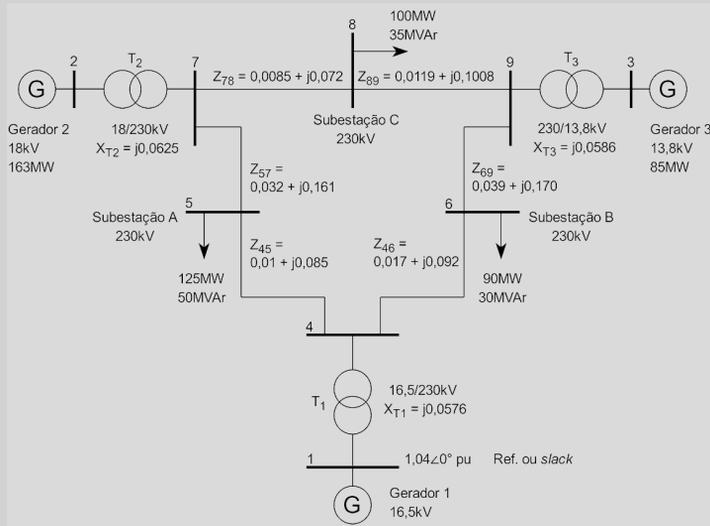


Figura 3.6 – Sistema IEEE, com nove barras

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Análise de Sistemas de Potência 1%%
%% Método: Gauss Seidel %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
clc

%Dados dos ramos de conexão (linhas e transformadores)
% | Da | Para | R | X | Bshunt |
% | Barra| Barra| | | |
d_l = [ 1 4 0.0 0.0576 0.0; % Matriz dados_linhas
2 7 0.0 0.0625 0.0;
3 9 0.0 0.0586 0.0;
4 5 0.01 0.085 0.088;
4 6 0.017 0.0920 0.079;
5 7 0.032 0.161 0.153;
6 9 0.039 0.1700 0.179;
7 8 0.0085 0.072 0.0745;
8 9 0.0119 0.1008 0.1045;];

```

```

% Matriz admitancia de barras Y
fb = d_l(:,1); % Da barra numero...
tb = d_l(:,2); % Para a barra numero...
r = d_l(:,3); % Resistencia, R
x = d_l(:,4); % Reatancia, X
b = d_l(:,5); % Ground Admittance, B/2...
z = r + i*x; % Matrix Z
y = 1./z; % Inverte cada elemento de Z
b = i*b; % Muda Bshunt para imaginario
nbus = max(max(fb),max(tb)); % identifica numero de barras
nramos = length(fb); % no. of branches...
Ybarra = zeros(nbus,nbus); % Inicializa YBarra...
% Completa Elementos fora da diagonal

for k=1:nramos
    Ybarra(fb(k),tb(k)) = -y(k);
    Ybarra(tb(k),fb(k)) = Ybarra(fb(k),tb(k));
end
% Completa os elementos da Diagonal

for m=1:nbus
    for n=1:nramos
        if fb(n) == m | tb(n) == m
            Ybarra(m,m) = Ybarra(m,m) + y(n) + b(n);
        end
    end
end

% Resultado da Matrix Admitancia de Barra
fprintf('\n\n MATRIZ ADMITÂNCIA DE BARRAS:');
Ybarra

%Dados fornecidos das barras
% Tipos: 1- Referencia; 2-PV(tensão controlada); 3-
PQ(barra de carga)

% |Barra|Tipo| V | theta | PGi | QGi | PDi | QDi | Qmin |
Qmax |
dados_barra = [ 1 1 1.04 0 0.0 0 0 0 0;
2 2 1.025 0 1.63 0 0 0 0.05025 0.08375;
3 2 1.025 0 0.85 0 0 0 -0.0817 -0.1362;
4 3 1.0 0 0 0 0 0 0 0;
5 3 1.0 0 0 0 0 1.25 0.5 0 0;
6 3 1.0 0 0 0 0 0.9 0.3 0 0;
7 3 1.0 0 0 0 0 0 0 0 0;
8 3 1.0 0 0 0 0 1 0.35 0 0;
9 3 1.0 0 0 0 0 0 0 0 0;];

% Assume-se que a Barra 1 é a barra de referencia ou "Slack
bus".

```

```

% Leitura e interpretação dos dados fornecidos, separando
em vetores
barra = dados_barra(:,1); % Numero da barra.
tipo = dados_barra(:,2); % Tipo da barra 1-Slack, 2-PV, 3-PQ.
V = dados_barra(:,3); % Tensões iniciais nas barras
th = dados_barra(:,4); % Angulos iniciais nas barras
PGiMW = dados_barra(:,5); % PGi, Potencia Ativa injetada na barra
QGiMVAR = dados_barra(:,6); % QGi, Potencia Reativa injetada na barra
PDiMW = dados_barra(:,7); % PDi, Potencia Ativa demandada na barra
QDiMVAR = dados_barra(:,8); % QDi, Potencia Reativa demanda na barra
Qmin = dados_barra(:,9); % Limite Minimo de Potencia Reativa para a barra
Qmax = dados_barra(:,10); % Limite Maximo de Potencia Reativa para a barra
nbarra = max(barra); % Numero total de barras
Pi = PGiMW - PDiMW; % Pi = PGi - PDi, Potencia Ativa liquida na barra
Qi = QGiMVAR - QDiMVAR; % Qi = QGi - QDi, Potencia Reativa liquida na barra
Vprev = V; % Inicializa variavel com estimativa inicial da tensão
erro_max = 0.0001; % Erro máximo desejado
erro = 1; % Inicializa variavel de erro
iteracao = 1; % Contador de iteração
k_max=100; % Numero máximo de iterações
%Calcula estimativas: Método de Gauss-Seidel

while ((erro > erro_max) & (iteracao<k_max)) % Inicio do loop de iterações
for i = 2:nbarra
somaYV = 0;
for k = 1:nbarra
if i ~= k
somaYV = somaYV + Ybarra(i,k)* V(k); % Somatório Tensão * Admitancia (Vk * Yik)
end
end
if tipo(i) == 2 % Calcula Qi para as barras PV
Qi(i) = -imag(conj(V(i))*(somaYV + Ybarra(i,i)*V(i)));
if (Qi(i) > Qmax(i) || (Qi(i) < Qmin(i)) % Verifica se houve violação dos limites de Qi
if Qi(i) < Qmin(i) % Se houve violação do limite inferior
Qi(i) = Qmin(i);
else % Se houve violação do limite superior
Qi(i) = Qmax(i);
end
tipo(i) = 3; % Se houve violação, modifica a barra PV para barra PQ
end
end
V(i) = (1/Ybarra(i,i))*((Pi(i)-j*Qi(i))/conj(V(i)) - somaYV); % Calcula a tensão da barra
if tipo(i) == 2 % Para barras PV, mantem o módulo da tensão e atualiza
somente o angulo

```

```

    V(i) = abs(Vprev(i))*cos(angle(V(i))) + j*abs(Vprev(i))*sin(angle(V(i)));
end
end
iteracao = iteracao + 1;           % Incrementa contador de iteração
erro = max(abs(abs(V) - abs(Vprev))); % Calcula o erro da iteração
Vprev = V;                       % Vprev é necessario na proxima iteração
end                               % Final do loop de iterações
                                % Mostra resultado dos calculos das tensões, angulos e

potencia reativa
fprintf('\n RESULTADO DOS CALCULOS DAS TENSÕES, ANGULOS E POTENCIA REATIVA NAS BAR-
RAS\n\n');
fprintf('Erro máximo admitido entre iteração: %f \n\n',erro_max);
fprintf('Número de iterações realizadas: %d \n\n',iteracao);
for n=1:nbarra
    fprintf('V%d=%%.4f[pu] %%.4f graus Q%d=%%.4f[pu]\n\n',n,abs(V(n)),180/pi*angle(V(n)),n,Qi(n));
end
                                % Potencia na barra de referencia
S1=Ybarra(1,1)*V(1)*conj(V(1))+Ybarra(1,4)*V(4)*conj(V(1));
fprintf('\n\n POTENCIAS NA BARRA 1: BARRA DE REFERENCIA');
fprintf('\n\nP1=%%.4f[pu] Q1=%%.4f[pu]\n\n',real(S1),imag(S1));
                                % Fluxos
fprintf('\n\n FLUXOS DE POTENCIA NAS LINHAS E TRANSFORMADORES:');
ri=1;
for rf=1:nramos
                                %fluxo da barra d_l(ri,1) para a barra d_l(rf,2)
    S(d_l(ri,1),d_l(rf,2))=V(d_l(ri,1))*((conj(V(d_l(ri,1)))-conj(V(d_l(rf,2))))/Ybarra(d_l(ri,1),d_l(rf,2))^-1);
    fprintf('\n\nP%d%d=%%.4f[pu] Q%d%d=%%.4f[pu]',d_l(ri,1),d_l(rf,2),real(S(d_l(ri,1),d_l(rf,2)))-
d_l(ri,1),d_l(rf,2),imag(S(d_l(ri,1),d_l(rf,2))));
    fprintf(' P%d%d=%%.4f[pu] Q%d%d=%%.4f[pu]',d_l(rf,2),d_l(ri,1),-real(S(d_l(ri,1),d_l(rf,2))),d_l(rf,2),-
d_l(ri,1),-imag(S(d_l(ri,1),d_l(rf,2))));
    ri=ri+1;
end

```

**Solução:**

Rodando o programa, a seguinte saída é obtida:

MATRIZ ADMITÂNCIA DE BARRAS:

Ybarra =

## Columns 1 through 2

```

0.0000000000000000 -17.361111111111111i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 -16.000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 +17.361111111111111i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 +16.000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i

```

## Columns 3 through 4

```

0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 +17.361111111111111i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 -17.064846416382252i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 3.307378962025307 -39.308888726118973i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i -1.365187713310580 +11.604095563139930i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i -1.942191248714727 +10.510682051867931i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 +17.064846416382252i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i

```

## Columns 5 through 6

```

0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
-1.365187713310580 +11.604095563139930i -1.942191248714727 +10.510682051867931i
2.552792092601728 -17.338230096448523i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 3.224200387138842 -15.840927014229456i
-1.187604379291148 + 5.975134533308591i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i -1.282009138424115 + 5.588244962361526i

```

## Columns 7 through 8

```

0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 +16.000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i
0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i 0.0000000000000000 + 0.0000000000000000i

```

```
-1.187604379291148 + 5.975134533308591i 0.000000000000000 + 0.000000000000000i
0.000000000000000 + 0.000000000000000i 0.000000000000000 + 0.000000000000000i
2.804726852537284 -35.445613130217033i -1.617122473246136 +13.697978596908444i
-1.617122473246136 +13.697978596908444i 2.772209954136233 -23.303249023271615i
0.000000000000000 + 0.000000000000000i -1.155087480890097 + 9.784270426363174i
```

Column 9

```
0.000000000000000 + 0.000000000000000i
0.000000000000000 + 0.000000000000000i
0.000000000000000 +17.064846416382252i
0.000000000000000 + 0.000000000000000i
0.000000000000000 + 0.000000000000000i
-1.282009138424115 + 5.588244962361526i
0.000000000000000 + 0.000000000000000i
-1.155087480890097 + 9.784270426363174i
2.437096619314212 -32.153861805106949i
```

RESULTADO DOS CALCULOS DAS TENSÕES, ANGULOS E POTENCIA REATIVA NAS BARRAS

Erro máximo admitido entre iteração: 0.000100

Número de iterações realizadas: 42

```
V1=1.0400[pu] 0.0000 graus Q1=0.0000[pu]
V2=1.0217[pu] 9.3382 graus Q2=0.0838[pu]
V3=1.0162[pu] 4.7439 graus Q3=-0.1362[pu]
V4=1.0238[pu] -2.2432 graus Q4=0.0000[pu]
V5=0.9927[pu] -4.0273 graus Q5=-0.5000[pu]
V6=1.0087[pu] -3.7208 graus Q6=-0.3000[pu]
V7=1.0216[pu] 3.7400 graus Q7=0.0000[pu]
V8=1.0103[pu] 0.7316 graus Q8=-0.3500[pu]
V9=1.0253[pu] 2.0071 graus Q9=0.0000[pu]
```

POTENCIAS NA BARRA 1: BARRA DE REFERENCIA

```
P1=0.7235[pu] Q1=-0.3065[pu]
```

FLUXOS DE POTENCIA NAS LINHAS E TRANSFORMADORES:

P14=0.7235[pu] Q14=0.3065[pu] P41=-0.7235[pu] Q41=-0.3065[pu]  
 P27=1.6291[pu] Q27=0.0822[pu] P72=-1.6291[pu] Q72=-0.0822[pu]  
 P39=0.8489[pu] Q39=-0.1378[pu] P93=-0.8489[pu] Q93=0.1378[pu]  
 P45=0.3230[pu] Q45=0.4190[pu] P54=-0.3230[pu] Q54=-0.4190[pu]  
 P46=0.2491[pu] Q46=0.2184[pu] P64=-0.2491[pu] Q64=-0.2184[pu]  
 P57=-0.7959[pu] Q57=-0.2786[pu] P75=0.7959[pu] Q75=0.2786[pu]  
 P69=-0.5619[pu] Q69=-0.1973[pu] P96=0.5619[pu] Q96=0.1973[pu]  
 P78=0.7210[pu] Q78=0.2649[pu] P87=-0.7210[pu] Q87=-0.2649[pu]  
 P89=-0.2084[pu] Q89=-0.1724[pu] P98=0.2084[pu] Q98=0.1724[pu]>>

Obs.: O reativo indicado do lado das tensões refere-se ao reativo injetado no sistema ou consumido pela barra condizente com cada barra do sistema analisado.

### 3.3.1 – Aspectos computacionais do método de Gauss-Seidel de fluxo de carga

O método de Gauss-Seidel usando a matriz de admitâncias apresenta as seguintes características:

- Convergência lenta: Geralmente, após oscilar nas primeiras iterações (as tensões nas barras mudam de valores), o processo caminha para uma solução de maneira uniforme, suave e unidirecional. Como o método de Gauss-Seidel é baseado na matriz de admitâncias, que é esparsa, existe um fraco acoplamento matemático entre as barras do SEP. O ajuste feito na tensão de uma barra reflete apenas nas barras vizinhas naquela iteração, sendo necessárias muitas iterações para que o ajuste corrija todas as barras do SEP.
- Dificuldade de convergência em SEP que apresentem a matriz de admitâncias não diagonalmente dominante, como nos casos em que ocorrem: reatâncias negativas devido a capacitores série ou transfor-

madores de três enrolamentos; e barras nas quais chegam ramos com admitâncias de ordens de grandeza muito diferentes.

- Dificuldade de convergência em SEP nos quais há grandes defasagens entre os ângulos das tensões, SEP fortemente radiais e SEP com grandes concentrações de carga em pequenas áreas.
- O gasto total em memória do método é proporcional ao número de barras do SEP, usando técnicas de esparsidade.
- O número total de operações aritméticas do processo iterativo, considerando-se tolerâncias de 0,1 a 0,01 MW na base de 100 MVA, é proporcional ao número de barras ao quadrado.
- Facilidade de programação.

### 3.4 – Exercícios

3.4.1 – Resolva as equações abaixo usando o método de Gauss e obtenha a solução para  $I_1$  e  $I_2$ . Inicie o processo de solução a partir de  $[I_1^0, I_2^0] = [1, 1]$  e interrompa o processo tão logo as variações em  $I_1^k$  e  $I_2^k$  sejam, em módulo, inferiores a 10%. Equações:

$$3I_1 - 2I_2 = 1,5$$

$$-2I_1 + 6I_2 = 1,0$$

O número  $k$  de iterações é igual a:

- a) 5
- b) 7
- c) 8
- d) 6
- e) 4

3.4.2 – Resolva o seguinte sistema de equações pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

3.4.3 – Resolva o seguinte sistema de equações pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - 0,25(\text{sen}x_1 + \cos x_2) = 0 \end{cases}$$

3.4.4 – Mostre que a fórmula iterativa  $V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left( \frac{P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{calculado}}}{V_i^*} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N Y_{ik} V_k \right)$ , usada no método de fluxo de carga de Gauss-Seidel, para o cálculo da tensão na barra  $i$  de um SEP, é equivalente às expressões abaixo, que traduzem o equilíbrio de potência na mesma barra do SEP:

$$P_i^G - P_i^C - \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) = 0$$

$$Q_i^G - Q_i^C - \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) = 0$$

3.4.5 – Um SEP possui, entre outras, as seguintes características:

a) Linhas com impedâncias série de valores muito diferentes conectadas à mesma barra

b) Presença de capacitores série em algumas linhas

O método de Gauss-Seidel seria indicado para resolver os fluxos de carga desse SEP? Justifique a sua resposta.

3.4.6 – Considere o SEP cujo diagrama unifilar é mostrado na figura 3.7.

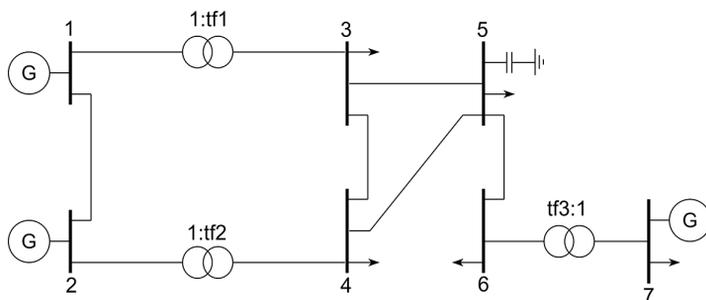


Figura 3.7 – Diagrama unifilar de um SEP

Os dados do SEP são apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1 – Dados das barras

Nº da barra	Tipo da barra	Tensão espec (pu)	Geração ativa MW	Carga ativa MW	Carga reativa MVA <sub>r</sub>	Pot. nominal shunt MVA <sub>r</sub>
1	Ref.	1,05	-	-	-	-
2	PV	1,01	25	-	-	-
3	PQ	-	-	20	13	-
4	PQ	-	-	17	9	-
5	PQ	-	-	120	50	40
6	PQ	-	-	15	11	-
7	PV	0,98	20	5	3	-

Tabela 3.2 – Dados dos ramos

Da barra	Para a barra	Resistência (pu)	Reatância (pu)	Susceptância total (pu)	Tape fase (%)
1	2	0,00731	0,0374	0,0025	-
1	3	-	0,0712	-	108
2	4	-	0,0684	-	104
3	4	0,0102	0,0476	0,0093	-
3	5	0,0315	0,0972	0,0104	-
4	5	0,0259	0,0750	0,0204	-
5	6	0,0214	0,0693	-	-
7	6	-	0,0814	-	98

Reavale a tensão da barra 3 pelo método de Gauss-Seidel, supondo que os valores mais atualizados das tensões (pu) sejam os seguintes:

$$E_1 = 1,050 + j0 \quad E_2 = 1,0 - j0,048 \quad E_3 = 0,973 + j0,031$$

$$E_4 = 1,039 - j0,042 \quad E_5 = 0,923 - j0,053 \quad E_6 = 1,002 + j0,012$$

$$E_7 = 0,982 + j0,008$$

3.4.7 - Calcule a primeira iteração de tensão para as barras do SEP da figura 3.8, usando o método de Gauss-Seidel. Todos os valores no diagrama da ilustração estão em pu, na base do SEP.

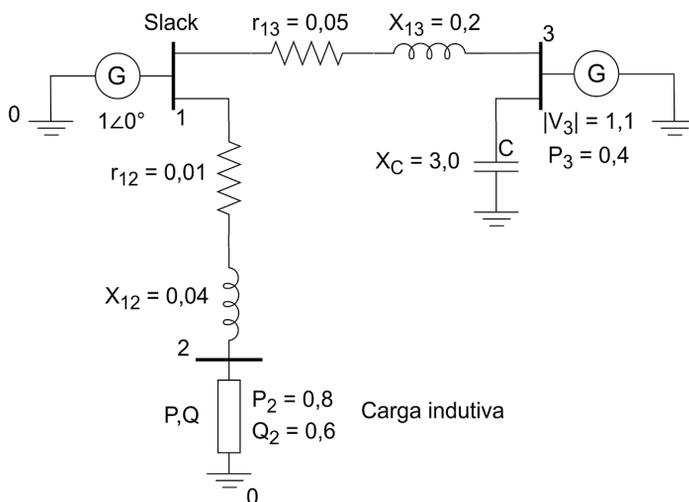


Figura 3.8 – Diagrama unifilar do SEP

## 3.4.8 – Sobre os métodos de Gauss/Gauss-Seidel:

- a) Não existe diferença entre os dois métodos
- b) O método de Gauss-Seidel leva menos iterações que o de Gauss, uma vez que trabalha com os valores mais atualizados das variáveis em questão.
- c) O método de Gauss leva menos iterações que o de Gauss-Seidel.

3.4.9 – Obtenha um algoritmo para a solução do problema do fluxo de carga pelo método de Gauss-Seidel. Observações:

- Deve ser usado o modelo  $[I] = [Y][E]$
- Especificar as diferenças de tratamento dos diferentes tipos de barras no algoritmo.
- O critério de convergência é baseado nos resíduos (*mismatches*) de potência para as barras, os quais são calculados a cada iteração:

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= | P_k^{calc} - P_k^{esp} | && \rightarrow && \text{barras PQ e PV} \\ \Delta Q_k &= | Q_k^{calc} - Q_k^{esp} | && \rightarrow && \text{barras PQ} \end{aligned}$$

Onde:

$P_k^{calc}$  e  $Q_k^{calc}$  : são calculados com base nos valores atuais das tensões e comparados com os valores especificados pelo problema

Se os resíduos (*mismatches*) de potência forem menores que o valor de tolerância especificado, considera-se que o processo iterativo convergiu e a solução foi encontrada.

## Bibliografia

1. ELGERD, O. I. *Electric Energy Systems: An Introduction* second edition, McGraw Hill, NY, 1998. 533 p.
2. GLENN, STAGG W. and EL-ABIAD AHMED H. *Computer Methods in Power System Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968. 427 p.
3. GRAINGER, J., J. e STEVENSON, W. D. Jr., *Power System Analysis*, Mc Graw-Hill Ed., 1994. 787 p.
4. EUENSWANDER, J. R. *Modern Power Systems*, International Textbook Company, 1971. 411 p.
5. STEVENSON, W. D. Jr., *Elements of Power System Analysis*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1982. 436 p.
6. TIBÚRCIO, J. C. *Análise de Sistemas de Potência*, UNIFEI, 1983.

# 4

## Métodos Iterativos de Newton-Raphson

### 4.1 – Introdução

Inicialmente, a dedução do método de Newton é realizada na forma geométrica e, em seguida, usando a expansão da série de Taylor. Então, é feita a aplicação do método para o problema do fluxo de carga.

### 4.2 – Método de Newton para uma equação não linear

Considere a seguinte representação gráfica de uma função  $f$ . Para uma aproximação  $x_{k-1}$ , é traçada uma reta tangente ao ponto  $((x_{k-1}), f(x_{k-1}))$ . O ponto em que esta reta corta o eixo X é a nova aproximação  $x_k$ .

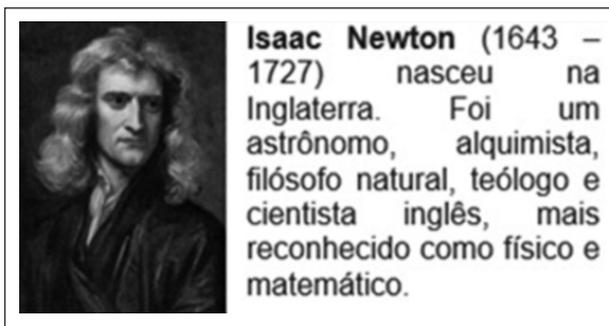


Figura 4.1 – Newton

Repetindo este processo sucessivamente, nota-se que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - r| = 0$  ou  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r$ .

O gráfico a seguir ilustra o processo. A partir do gráfico da figura 4.1 e expressando a tangente do ângulo da reta de inclinação em termos de derivada, obtemos a função de iteração do método.

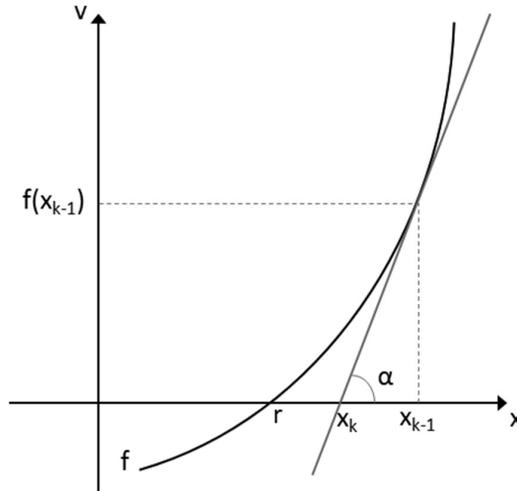


Figura 4.2 – Método de Newton-Raphson para uma equação não linear

Considerando-se o gráfico da figura 4.2, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{f(x_{k-1})}{(x_{k-1} - x_k)} = f'(x_{k-1}) \\
 (x_{k-1} - x_k) &= \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\
 x_k &= x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\
 F(x_{k-1}) &= x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \\
 F(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



Segundo a expansão de uma função  $f$  pela série de Taylor, temos:

i) Uma variável ( $n=1$ )

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} + f'''(x)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (4.3)$$

Para  $\Delta x$  pequeno, ou seja,  $\Delta x \rightarrow 0$ , é possível aproximar:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x \quad (4.4)$$

Com erro de truncamento da ordem de  $\left| f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2} \right|$ :

ii) Duas variáveis ( $n=2$ )

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{(\Delta y)^2}{2} + \dots \quad (4.5)$$

Para  $\Delta x$  e  $\Delta y$  pequenos, ou seja,  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta y \rightarrow 0$ , é possível aproximar:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \quad (4.6)$$

Com erro de truncamento da ordem de:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{(\Delta y)^2}{2} \right| \quad (4.7)$$

Obs.: A notação  $\frac{\partial f}{\partial x}$  representa:  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

iii) Em geral, para  $n$  variáveis temos:

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \quad (4.8)$$



Ou

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -f_1(x_1, \dots, x_n) \\ -f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ -f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Sabendo que  $[J][R]=[B] \Rightarrow [R]=[J]^{-1}[B]$ ; a forma iterativa do método de Newton para sistemas de equações não lineares seria:

$$[X]^{(k+1)} = [X]^{(k)} + [R]^{(k)}$$

Ou

$$[X]^{(k+1)} = [X]^{(k)} + [J]^{-1} [B]^{(k)} \quad (4.12)$$

Ou

$$[X]^{(k+1)} = [X]^{(k)} - [J]^{-1} [F]^{(k)}$$

Onde:

$$[J]^{-1}: \text{inversa do jacobiano em } [X]^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$$

E se  $k=0$ , então  $[X]^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$  seria a aproximação inicial da solução do sistema.

Observe que a fórmula 4.12 é semelhante à fórmula iterativa de Newton-Raphson para uma função simples (uma única variável):

No exemplo a seguir, optou-se pela equação  $[J][R]=[B]$ , pois a solução  $[R]$  do sistema  $[J][R]=[B]$  tem um esforço computacional menor do que se obter  $[J]^{-1}[B]$ .

**Exemplo 4.1**

Obter a solução do sistema a seguir, com precisão de 0,001, partindo de  $X^{(0)} = [1, -2]^T$ , ou seja,  $x_1^{(0)} = 1$  e  $x_2^{(0)} = -2$ .

$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot \log_{10}(x_1) - x_2^2 = 0 \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

**Solução:**

Sejam: 
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + 3 \cdot \log_{10}(x_1) - x_2^2 \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 \end{cases}$$

Os elementos da matriz jacobiana são:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1 + \frac{1}{x} \log_{10} e, \text{ pois } \frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x} \log_{10} e$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2x_2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 - 5 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -x_1$$

Substituindo as estimativas iniciais, temos:

$$[J] = \begin{bmatrix} 2.30288345 & 4.00000000 \\ 1.00000000 & -1.00000000 \end{bmatrix} \text{ e } [B] = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se:

1ª) Iteração

$$[R] = [0.47597263, 0.47597263]^T$$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + 0.47597263 = 1 + 0.47597263 = 1.47597263$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + 0.47597263 = -2 + 0.47597263 = -1.52402737$$

A solução obtida em três iterações tem precisão de  $10^{-7}$ , apresentando os seguintes valores numéricos:  $x_1 = 1.4588902$  e  $x_2 = -1.3967670$

## 4.4 – Aplicação do método de Newton-Raphson ao problema do fluxo de potência – Formulação em coordenadas cartesianas

O método do fluxo de potência Newton-Raphson em coordenadas cartesianas é formulado conforme apresentado a seguir.

Na forma cartesiana, a tensão  $V_i$  da barra  $i$  de um SEP é dada por:

$$V_i = e_i + jh_i \quad (4.13)$$

A equação básica do fluxo de potência para a barra  $i$  de um sistema é dada pela equação 3.7, repetida a seguir:

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (4.14)$$

Usando a forma cartesiana de  $V_i$  e  $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$ , temos:

$$P_i - jQ_i = (e_i - jh_i) \sum_{k=1}^N (G_{ik} + jB_{ik})(e_k + jh_k) \quad (4.15)$$

A separação das partes real e imaginária resulta em:

$$P_i = \sum_{k=1}^N e_i (G_{ik} e_k - h_k B_{ik}) + h_i (h_k G_{ik} + e_k B_{ik}) \quad (4.16)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^N h_i (G_{ik} e_k - h_k B_{ik}) - e_i (h_k G_{ik} + e_k B_{ik}) \quad (4.17)$$

As equações 4.15 e 4.16 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\Delta P_i = P_i^G - P_i^C - \sum_{k=1}^N e_i (G_{ik} e_k - h_k B_{ik}) + h_i (h_k G_{ik} + e_k B_{ik}) \quad (4.18)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^G - Q_i^C - \sum_{k=1}^N h_i (G_{ik} e_k - h_k B_{ik}) - e_i (h_k G_{ik} + e_k B_{ik}) \quad (4.19)$$

As equações 4.18 e 4.19 são funções matemáticas, representando os resíduos (*mismatches*) de potências ativas e reativas em coordenadas cartesianas nas barras do SEP.

Como foi feito no método de Gauss-Seidel, neste caso também se deve levar em conta os tipos de barras PV, PQ e referência, uma vez que o sistema de equações que está sendo resolvido é o mesmo. Portanto, as seguintes considerações podem ser feitas:

• Na barra de referência, o valor da tensão em módulo e ângulo é conhecido. Por esta razão, não é necessária nenhuma equação para essa barra.

• Nas barras de carga (do tipo PQ), tanto o módulo como o ângulo da tensão são desconhecidos. Portanto, são necessárias as equações dos resíduos de potências ativa e reativa  $\Delta P_i$  e  $\Delta Q_i$ .

• No caso das barras serem do tipo PV, especifica-se a potência ativa da barra e o módulo de tensão. Assim, as incógnitas são o ângulo de tensão da barra e a potência reativa. A equação da potência ativa é a mesma da barra do tipo PQ, sendo que a segunda equação reflete a restrição ao módulo da tensão de barra, que deve permanecer constante. Ou seja, a equação da potência reativa é substituída por uma equação de tensão:

$$|V_i^{esp}|^2 = e_i^2 + h_i^2 \quad (4.20)$$

A variação de tensão  $\Delta |V_i^{iteração-k}|^2$ , necessária para a atualização do valor da tensão de barra  $|V_i^{esp}|$ , é computada por meio da equação 4.21:

$$\Delta |V_i^{iteração-k}|^2 = |V_i^{esp}|^2 - |V_i^{iteração-k}|^2 \quad (4.21)$$

O sistema de equações lineares, que deve ser resolvido em cada iteração do método de Newton-Raphson em coordenadas cartesianas, fica:

$$\begin{bmatrix} [\Delta P] \\ [\Delta Q] \\ [\Delta |V|^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] & [J_2] \\ [J_3] & [J_4] \\ [J_5] & [J_6] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Delta e] \\ [\Delta h] \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

A dimensão do vetor  $[\Delta P]$  é (N-1). Caso tenhamos  $r$  barras do tipo PV, a dimensão de  $[\Delta Q]$  será (N-1-r) e a dimensão de  $[\Delta |V|^2]$  será  $r$ .

A matriz jacobiana  $[Jac]$ , nesse caso, constará de seis submatrizes:

$$[Jac] = \begin{bmatrix} [J_1] & [J_2] \\ [J_3] & [J_4] \\ [J_5] & [J_6] \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Os elementos de cada uma dessas submatrizes são dados por:

### Submatriz $[J_1]$

Elementos da diagonal:

$$\begin{aligned}
 P_i &= e_i(G_{ii}e_i - h_iB_{ii}) + h_i(h_iG_{ii} + e_iB_{ii}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N e_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) + h_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) \\
 \frac{\partial P_i}{\partial e_i} &= 2G_{ii}e_i - h_iB_{ii} + h_iB_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N e_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) + h_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) = \\
 &= G_{ii}e_i + G_{ii}e_i - h_iB_{ii} + h_iB_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) = \\
 &= G_{ii}e_i + h_iB_{ii} + \sum_{k=1}^N e_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik})
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial e_k} = e_iG_{ik} + h_iB_{ik} \tag{4.25}$$

### Submatriz $[J_2]$

Elementos da diagonal:

$$\begin{aligned}
 P_i &= e_i(G_{ii}e_i - h_iB_{ii}) + h_i(h_iG_{ii} + e_iB_{ii}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N e_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) + h_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) \\
 \frac{\partial P_i}{\partial h_i} &= -e_iB_{ii} + 2h_iG_{ii} + e_iB_{ii} + \frac{\partial}{\partial h_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N e_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) + h_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) = \\
 &= -B_{ii}e_i + B_{ii}e_i + h_iG_{ii} + h_iG_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) = \\
 &= B_{ii}e_i + h_iG_{ii} + \sum_{k=1}^N (h_kG_{ik} + e_kB_{ik})
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial h_k} = -e_iB_{ik} + h_iG_{ik} \tag{4.27}$$

**Submatriz  $[J_3]$** 

Elementos da diagonal:

$$\begin{aligned}
Q_i &= h_i(G_{ii}e_i - h_iB_{ii}) - e_i(h_iG_{ii} + e_iB_{ii}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N h_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) - e_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) \\
\frac{\partial Q_i}{\partial e_i} &= -2e_iB_{ii} + h_iG_{ii} + h_iG_{ii} + \frac{\partial}{\partial e_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N h_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) - e_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) = \\
&= -B_{ii}e_i + B_{ii}e_i + h_iG_{ii} + h_iG_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N -(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) = \\
&= -B_{ii}e_i + h_iG_{ii} + \sum_{k=1}^N -(h_kG_{ik} + e_kB_{ik})
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial e_k} = h_iG_{ik} - e_iB_{ik} \tag{4.29}$$

**Submatriz  $[J_4]$** 

Elementos da diagonal:

$$\begin{aligned}
Q_i &= h_i(G_{ii}e_i - h_iB_{ii}) - e_i(h_iG_{ii} + e_iB_{ii}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N h_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) - e_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) \\
\frac{\partial Q_i}{\partial h_i} &= e_iG_{ii} - 2h_iB_{ii} - e_iG_{ii} + \frac{\partial}{\partial h_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N h_i(G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) - e_i(h_kG_{ik} + e_kB_{ik}) = \\
&= -2h_iB_{ii} + G_{ii}e_i - e_iG_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (G_{ik}e_k - h_kB_{ik}) = \\
&= -B_{ii}h_i - e_iG_{ii} + \sum_{k=1}^N (G_{ik}e_k - h_kB_{ik})
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial h_k} = -h_iB_{ik} - e_iG_{ik} \tag{4.31}$$

**Submatriz  $[J_5]$**

Elementos da diagonal:

$$\frac{\partial V_i^2}{\partial e_i} = 2e_i \quad (4.32)$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial V_i^2}{\partial e_k} = 0 \quad (4.33)$$

### Submatriz $[J_6]$

Elementos da diagonal:

$$\frac{\partial V_i^2}{\partial h_i} = 2h_i \quad (4.34)$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial V_i^2}{\partial h_k} = 0 \quad (4.35)$$

### Exemplo 4.2

Usando o programa indicado a seguir, resolva o sistema da figura 4.5 pelo método de Newton-Raphson, em coordenadas cartesianas.

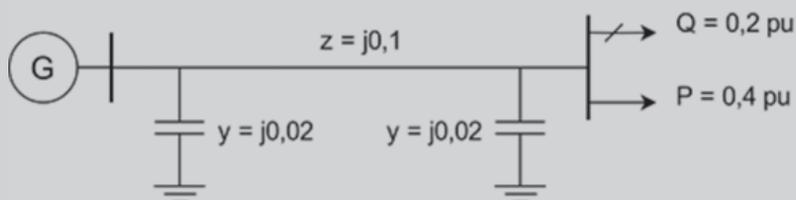


Figura 4.5 – Figura do exemplo 4.2

```

clear all;
clc;
Y=[-j*9.98 j*10;j*10 -j*9.98];
Vr1=1;
Vim1=0;
Vr2=1;
Vim2=0;
J1=- (imag(Y(2,1))*0);
J2=- (imag(Y(2,1))*1);
J3=- (-2*imag(Y(2,2))*Vr2-imag(Y(2,1))*1);
J4=- (-2*imag(Y(2,2))*Vim2);
J=[J1 J2;J3 J4];
J
deltaP=0-0,4-Vr2*(-imag(Y(2,1))*0)+Vim2*(imag(Y(2,1))*Vr1);
deltaQ=0-0.2+imag(Y(2,2))*(Vim2^2+Vr2^2)+Vr2*(imag(Y(2,1))*Vr1);
deltaP
deltaQ
V=[1;0];
while 1
    V=V-inv(J)*[deltaP;deltaQ];
    if abs(V(1,1)-Vr2)<0,0001 & abs(V(2,1)-Vim2)<0,0001
        break;
    end
    Vr2=V(1,1)
    Vim2=V(2,1)
    %Atualiza Jacobiano
    %Atualiza deltaP e deltaQ
    J1=- (imag(Y(2,1))*0);
    J2=- (imag(Y(2,1))*1);
    J3=- (-2*imag(Y(2,2))*Vr2-imag(Y(2,1))*1);
    J4=- (-2*imag(Y(2,2))*Vim2);
    J=[J1 J2;J3 J4];
    deltaP=0-0.4-Vr2*(-imag(Y(2,1))*0)-Vim2*(imag(Y(2,1))*Vr1);
    deltaQ=0-0.2+imag(Y(2,2))*(Vim2^2+Vr2^2)+Vr2*(imag(Y(2,1))*Vr1);
end

```

**Solução:**

J =

```

0 -10,000000000000000
-9.960000000000001      0

```

```

deltaP =
-0.400000000000000

```

```

deltaQ =
-0.180000000000000

```

```

Vr2 =

0.981927710843373

```

```

Vim2 =

-0,040000000000000

```

```

Vr2 =

0.979924690825959

```

```

Vim2 =

-0,040000000000000

```

Obs.: Note que foram necessárias duas iterações para uma tolerância de  $10^{-5}$  pu. Como observação, coloca-se que no modo como o programa foi escrito, adotou-se, por simplicidade, um critério de convergência baseado em resíduo de tensão e não em resíduo de potência, como é comum no método de Newton-Raphson.

## 4.5 – Aplicação do método de Newton-Raphson ao problema do fluxo de potência – Formulação em coordenadas polares

Várias formulações são possíveis ao se aplicar o método de Newton-Raphson ao problema do fluxo de potência. Algumas delas usam a forma

cartesiana, conforme apresentado no item anterior e desenvolvido no método de fluxo de carga de Ward e Hale, para representar as tensões de barras. Outras expressam o equilíbrio das energias no sistema em termos de correntes nodais; enquanto outras ainda utilizam equações de correntes e de potências ao mesmo tempo.

Agora será apresentada a formulação que utiliza apenas equações de potência, com as tensões de barras representadas na forma polar. Trata-se da formulação mais usual e utilizada para a dedução das equações do método desacoplado rápido, que será apresentado no capítulo 5.

A tensão  $V_i$  da barra  $i$  de um SEP é dada, na forma polar, por:

$$V_i = |V_i| e^{j\theta_i} \quad (4.36)$$

A equação básica do fluxo de potência para a barra  $i$  de um sistema é dada pela equação 3.7, repetida a seguir:

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (4.37)$$

Colocando as potências no primeiro membro, temos:

$$P_i - jQ_i = \sum_{k=1}^N V_i^* V_k Y_{ik} \quad (4.38)$$

Ao fazer o conjugado em ambos os lados da equação:

$$P_i + jQ_i = \sum_{k=1}^N V_i V_k^* Y_{ik}^* \quad (4.39)$$

Usando a notação polar:

$$P_i + jQ_i = \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| e^{j(\theta_i - \theta_k)} Y_{ik}^* \quad (4.40)$$

Mas:

$$e^{j(\theta_i - \theta_k)} = \cos(\theta_i - \theta_k) + j\text{sen}(\theta_i - \theta_k) \quad (4.41)$$

$$Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$$

Substituindo:

$$P_i = \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) \quad (4.42)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (4.43)$$

Onde:

$$\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$$

As equações 4.42 e 4.43 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\Delta P_i = P_i^G - P_i^C - \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) \quad (4.44)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^G - Q_i^C - \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (4.45)$$

As equações 4.44 e 4.45 são funções matemáticas, representando os resíduos de potências ativas e reativas nas barras do SEP. Quando a solução do fluxo de potência é encontrada, ou seja, quando são conhecidos os módulos e os ângulos de tensão, e estes são substituídos nas equações 4.44 e 4.45, os valores de  $\Delta P_i$  e  $\Delta Q_i$  ficam próximos de zero. Isso porque o processo de cálculo das tensões é feito na forma iterativa, não sendo, portanto, valores exatos. Quanto mais próximos esses elementos estão de zero, mais próximo estará o processo iterativo da solução.

Como foi feito no método de Newton-Raphson em coordenadas cartesianas, aqui também deve-se levar em conta os tipos de barras PV, PQ e referência, uma vez que o sistema de equações que está sendo resolvido é o mesmo. Portanto, as seguintes considerações podem ser feitas:

- Na barra de referência, o valor da tensão em módulo e ângulo é conhecido. Por esta razão, não é necessária nenhuma equação para essa barra.
- Nas barras de carga (do tipo PQ), tanto o módulo como o ângulo da tensão são desconhecidos. Portanto, são necessárias as equações de resíduos de potências ativa e reativa  $\Delta P_i$  e  $\Delta Q_i$ .
- Nas barras de geração (do tipo PV), o módulo da tensão é conhecido  $|V_i^{esp}|$ , enquanto o ângulo de fase é desconhecido. Portanto, só há necessidade da equação de resíduo de potência ativa  $\Delta P_i$ .

Logo, o número total de equações e de incógnitas é  $N_{PV} + 2N_{PQ}$ , onde  $N_{PV}$  é o número de barras do tipo PV e  $N_{PQ}$  é o número de barras do tipo PQ.

O vetor  $[x]$  contendo todas as incógnitas (ou variáveis de estado) do SEP pode ser definido da seguinte forma:

$$[x] = \begin{bmatrix} \theta \\ |V| \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Onde:

$[\theta]$ : vetor dos ângulos das tensões para todas as barras, com exceção da barra de referência

$[|V|]$ : vetor dos módulos de tensão para todas as barras do tipo PQ

O vetor  $[g]$ , que engloba todas as equações do fluxo de potência, também pode ser definido da seguinte forma:

$$[g] = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Onde:

$[\Delta P]$ : vetor das equações de potência ativa para todas as barras do SEP, exceto a de referência

$[\Delta Q]$ : vetor das equações de potência reativa, escritas para todas as barras PQ do SEP

A expressão iterativa para a solução do problema fica da seguinte forma:

$$[x^{m+1}] = [x^m] + [\Delta x^m] \quad (4.48)$$

Com:

$$[\Delta x^m] = -[Jac]^{-1} [g^m] \quad (4.49)$$

Nesse caso, a matriz jacobiana  $[Jac]$  consiste de quatro submatrizes:

$$[Jac] = \begin{bmatrix} H & N' \\ J & L' \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Os elementos de cada uma dessas submatrizes são dados por:

$$\begin{cases} H_{ik} = \partial \Delta P_i / \partial \theta_k \\ H_{ii} = \partial \Delta P_i / \partial \theta_i \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} N'_{ik} = \partial \Delta P_i / \partial |V_k| \\ N'_{ii} = \partial \Delta P_i / \partial |V_i| \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} J_{ik} = \partial \Delta Q_i / \partial \theta_k \\ J_{ii} = \partial \Delta Q_i / \partial \theta_i \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\begin{cases} L'_{ik} = \partial \Delta Q_i / \partial |V_k| \\ L'_{ii} = \partial \Delta Q_i / \partial |V_i| \end{cases} \quad (4.54)$$

Nestes casos, os índices  $i$  e  $k$  são relativos às barras  $i$  e  $k$  do SEP.

O vetor  $[\Delta x]$ , de acordo com o que foi feito com o vetor  $[x]$ , pode ser definido por:

$$[\Delta x] = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ |\Delta V| \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

As equações 4.48 e 4.49 podem, portanto, serem reescritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \theta^{m+1} \\ |V^{m+1}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^m \\ |V^m| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \theta^m \\ |\Delta V^m| \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta^m \\ |\Delta V^m| \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & N' \\ J & L' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P^m \\ \Delta Q^m \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Com a finalidade de tornar numericamente iguais os termos  $H_{ik}$  e  $L'_{ik}$ , bem como simétricos os termos  $J_{ik}$  e  $N'_{ik}$  da matriz jacobiana, é bastante comum redefinir as submatrizes  $[N']$  e  $[L']$ , assim como o vetor  $[\Delta x]$ :

$$[\Delta x] = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ |\Delta V|/|V| \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Neste caso,  $[|\Delta V|/|V|]$  é um vetor, em que cada elemento  $[|\Delta V|]$  aparece dividido pelo módulo da tensão correspondente.

As submatrizes  $[N']$  e  $[L']$  passam a ser denotadas por  $[N]$  e  $[L]$ , e seus elementos definidos por:

$$\begin{cases} N_{ik} = |V_k| \left( \frac{\partial \Delta P_i}{\partial |V_k|} \right) \\ N_{ii} = |V_i| \left( \frac{\partial \Delta P_i}{\partial |V_i|} \right) \end{cases} \quad (4.59)$$

$$\begin{cases} L_{ik} = |V_k| \left( \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial |V_k|} \right) \\ L_{ii} = |V_i| \left( \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial |V_i|} \right) \end{cases} \quad (4.60)$$

Observe que as alterações não modificam a solução final, mas servem para reduzir o armazenamento computacional de elementos da matriz jacobiana.

Neste texto serão calculados os elementos da matriz jacobiana, de acordo com as equações 4.51, 4.53, 4.59 e 4.60. O sinal negativo, relativo ao método de Newton-Raphson, será colocado nos elementos das submatrizes. Este procedimento será usado para a dedução das equações do método desacoplado rápido.

Com o fim de tornar iguais, numericamente, os termos  $H_{ik}$  e  $L'_{ik}$ , bem como simétricos os termos  $J_{ik}$  e  $N'_{ik}$  da matriz jacobiana, Van Ness e Griffin redefiniram as submatrizes  $[N']$  e  $[L']$ , bem como o vetor  $[\Delta x]$ .

As novas equações de iteração são dadas por:

$$\left[ \frac{\theta^{m+1}}{|V^{m+1}|} \right] = \left[ \frac{\theta^m}{|V^m|} \right] + \left[ \frac{\Delta \theta^m}{(|\Delta V|/|V|)^m} \right] \quad (4.61)$$

$$\left[ \frac{\Delta \theta^m}{(|\Delta V|/|V|)^m} \right] = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P^m \\ \Delta Q^m \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

### 4.5.1 – Elementos da matriz jacobiana

A matriz jacobiana do SEP é formada e invertida a cada iteração. Para cada elemento das submatrizes, as expressões gerais são obtidas da seguinte forma:

Para

$$i \neq k$$

$$H_{ik} = -\frac{\partial (P_i^G - P_i^C - P_i)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \left[ \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \right]}{\partial \theta_k} \quad (4.63)$$

Exemplificando:

Considerando-se um sistema com cinco barras, como mostrado na figura 4.6:

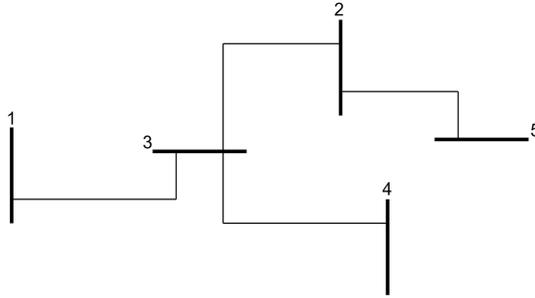


Figura 4.6 – Sistema com cinco barras

O termo  $P_3 = \sum_{k=1}^5 |V_3| |V_k| (G_{3k} \cos \theta_{3k} + B_{3k} \text{sen} \theta_{3k})$  é igual a:

$$P_3 = |V_3| [|V_1| (G_{31} \cos \theta_{31} + B_{31} \text{sen} \theta_{31}) + |V_2| (G_{32} \cos \theta_{32} + B_{32} \text{sen} \theta_{32}) + |V_3| (G_{33} \cos \theta_{33} + B_{33} \text{sen} \theta_{33}) + |V_4| (G_{34} \cos \theta_{34} + B_{34} \text{sen} \theta_{34}) + |V_5| (G_{35} \cos \theta_{35} + B_{35} \text{sen} \theta_{35})]$$

a) Se  $k$  não for diretamente ligado a  $i \Rightarrow H_{ik} = 0$ . Este é o caso de  $H_{35}$  ou  $H_{53}$ , pois  $G_{35}$  e  $B_{35}$  são iguais a zero.

b) Se  $k$  for diretamente ligado a  $i \Rightarrow H_{ik} = \frac{\partial [|V_i| |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik})]}{\partial \theta_k}$ .

$$H_{ik} = |V_i| |V_k| [(G_{ik} (-) (-\text{sen} \theta_{ik}) + B_{ik} \cos \theta_{ik} (-1)] = |V_i| |V_k| [G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}] \quad (4.64)$$

Estes são os casos, por exemplo, de  $H_{32}$  e  $H_{34}$ . No caso de  $H_{32}$ , como a derivada é em relação a  $\theta_2$ , os outros termos do somatório são iguais a zero.

Os elementos fora da diagonal principal das outras submatrizes são obtidos com considerações semelhantes e dados por:

$$L_{ik} = -|V_k| \frac{\partial [-|V_i| |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})]}{\partial |V_k|} = |V_i| |V_k| [G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}] \quad (4.65)$$

$$J_{ik} = -\frac{\partial [-|V_i| |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})]}{\partial \theta_k} = -|V_i| |V_k| [G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}] \quad (4.66)$$

$$N_{ik} = -|V_k| \frac{\partial[-|V_i||V_k|(G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik})]}{\partial |V_k|} = |V_i||V_k|[G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}] \quad (4.67)$$

ou seja:

$J_{ik} = -N_{ik}$  A matriz jacobiana é simétrica em estrutura de esparsidade, mas não em termos de valores numéricos. Não se deve confundir o  $J$  da submatriz do jacobiano com a matriz completa do jacobiano.

Para  $i = k$ ,

$$H_{ii} = -\frac{\partial}{\partial \theta_i} (P_i^G - P_i^C - P_i) = -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[ -\sum_{k=1}^N |V_i||V_k|(G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) \right] \quad (4.68)$$

Retirando-se o termo  $ii$  do somatório, temos:

$$H_{ii} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |V_i||V_k|(G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) + V_i^2 G_{ii} \right] \quad (4.69)$$

Fazendo-se a derivada:

$$H_{ii} = \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |V_i||V_k|(G_{ik} (-\text{sen} \theta_{ik}) + B_{ik} \cos \theta_{ik}) \right] \quad (4.70)$$

Logo:

$$H_{ii} = \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |V_i||V_k|(-G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} + B_{ik} \cos \theta_{ik}) \right] \quad (4.71)$$

Observe que a diferença para  $Q_i$  é de somente um termo. Assim, adicionando-se este termo, temos:

$$H_{ii} = \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |V_i||V_k|(-G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} + B_{ik} \cos \theta_{ik}) - |V_i|^2 B_{ii} + |V_i|^2 B_{ii} \right] = -Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \quad (4.72)$$

Cálculo dos outros elementos:

$$L_{ii} = -|V_i| \frac{\partial[Q_i^G - Q_i^C - Q_i]}{\partial|V_i|} = |V_i| \frac{\partial Q_i}{\partial|V_i|} = \frac{\partial \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) - |V_i|^2 B_{ii} \right]}{|V_i| \partial|V_i|} \quad (4.73)$$

$$L_{ii} = |V_i| \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) - 2|V_i| B_{ii} \right] \quad (4.74)$$

Reagrupando o termo do somatório, multiplicando e dividindo o segundo membro por  $|V_i|$  e usando a expressão de  $Q_i$ , temos:

$$L_{ii} = |V_i| \left[ \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) - |V_i| B_{ii} \right] = Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \quad (4.75)$$

O cálculo de  $J_{ii}$  e  $N_{ii}$  é feito da seguinte forma:

$$J_{ii} = -\frac{\partial[Q_i^G - Q_i^C - Q_i]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = |V_i| \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) - |V_i|^2 G_{ii} \quad (4.76)$$

$$J_{ii} = |V_i| \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) - |V_i|^2 G_{ii} = P_i - |V_i|^2 G_{ii} \quad (4.77)$$

$$N_{ii} = -|V_i| \frac{\partial[P_i^G - P_i^C - P_i]}{\partial \theta_i} = |V_i| \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = |V_i| \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) + |V_i| G_{ii} \quad (4.78)$$

$$N_{ii} = |V_i| \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) + |V_i| G_{ii} = P_i + |V_i|^2 G_{ii} \quad (4.79)$$

Em resumo, os elementos da matriz jacobiana são calculados pelas expressões (4.80) a (4.83).

$$H \begin{cases} H_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_k} = |V_i| |V_k| [G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \text{cos} \theta_{ik}] \\ H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = \left[ \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (-G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} + B_{ik} \text{cos} \theta_{ik}) - |V_i|^2 B_{ii} \right] = -Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \end{cases} \quad (4.80)$$

$$N \begin{cases} N_{ik} = |V_k| \frac{\partial P_i}{\partial |V_k|} = |V_i| |V_k| [G_{ik} \text{cos} \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}] \\ N_{ii} = |V_i| \frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = \sum_{k=1}^N |V_i| |V_k| (G_{ik} \text{cos} \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) + |V_i| G_{ii} = P_i + |V_i|^2 G_{ii} \end{cases} \quad (4.81)$$

$$J \begin{cases} J_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k} = -|V_i| |V_k| [G_{ik} \text{cos} \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}] \\ J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = |V_i| \left[ \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \text{cos} \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}) - |V_i|^2 G_{ii} \right] = P_i - |V_i|^2 G_{ii} \end{cases} \quad (4.82)$$

$$L \begin{cases} L_{ik} = |V_k| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|} = |V_i| |V_k| [G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \text{cos} \theta_{ik}] \\ L_{ii} = |V_i| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = |V_i| \left[ \sum_{k=1}^N |V_k| (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \text{cos} \theta_{ik}) - |V_i| B_{ii} \right] = Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \end{cases} \quad (4.83)$$

Os elementos das submatrizes 4.51 a 4.54, não levando em consideração o artifício de Van Ness e Griffin, têm os elementos N' e L' determinados usando o mesmo procedimento anterior. Estes elementos são dados por:

$$N' \begin{cases} N'_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial |V_k|} = V_i [G_{ik} \text{cos} \theta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}] \\ N'_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = V_i^{-1} (P_i + |V_i|^2 G_{ii}) \end{cases} \quad (4.84)$$

$$L' \begin{cases} L'_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|} = V_i [G_{ik} \text{cos} \theta_{ik} - B_{ik} \text{sen} \theta_{ik}] \\ L'_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = V_i^{-1} (Q_i - |V_i|^2 B_{ii}) \end{cases} \quad (4.85)$$

As equações de iteração são modificadas para as seguintes:

$$\left[ \frac{\theta^{m+1}}{(V)^{m+1}} \right] = \left[ \frac{\theta^m}{(V)^m} \right] + \left[ \frac{\Delta \theta^m}{(\Delta V)^m} \right] \quad (4.86)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta^m \\ (\Delta V)^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N' \\ J & L' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P^m \\ \Delta Q^m \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

A figura 4.7 apresenta o fluxograma para o método.

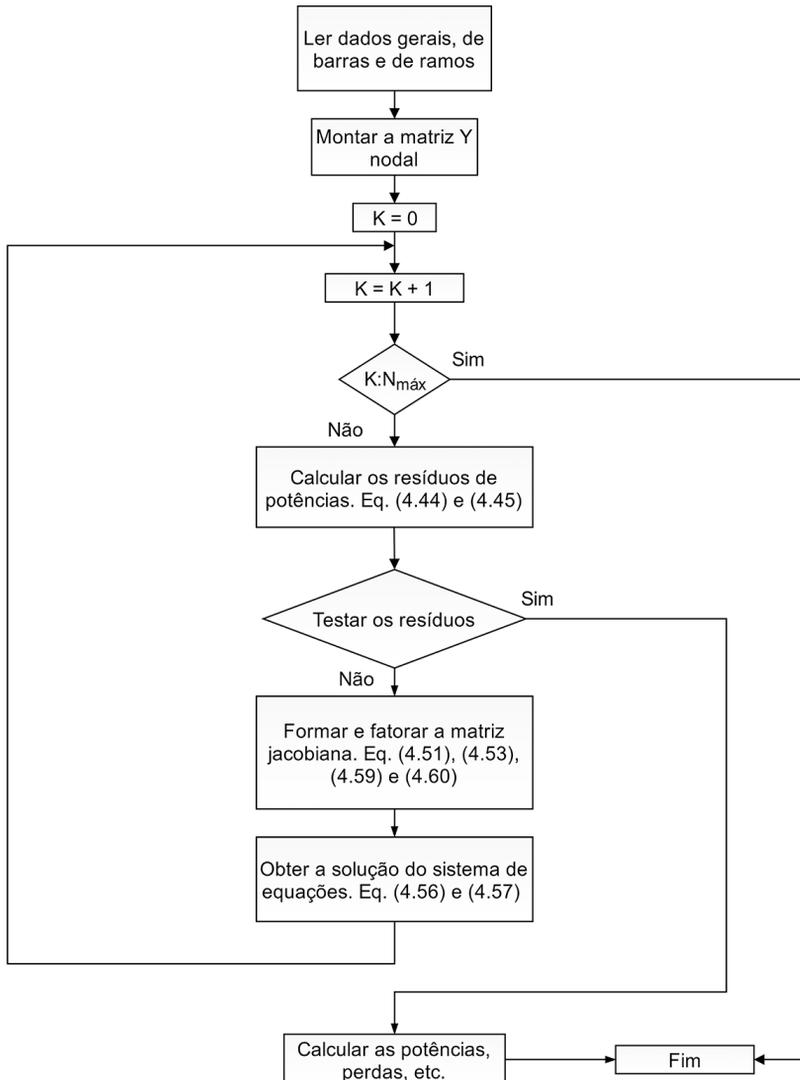


Figura 4.7 – Fluxograma para o método de Newton-Raphson

Conforme a figura 4.7, o processo de fatoração da matriz jacobiana pelo método de Newton-Raphson consiste em armazenar os elementos não nulos da matriz, com o objetivo de economizar memória do computador.

**Exemplo 4.3**

Determine a solução do SEP a seguir, que resulta do cálculo do fluxo de potência de duas iterações do método de Newton-Raphson, usando a matriz jacobiana calculada pelo artifício de Van Ness e Griffin e sem usar o referido artifício. Os dados de ramos e de barras do sistema são mostrados nas tabelas seguintes. Na barra 2 está ligado um banco de capacitores com reatância de 1 pu. A potência base é de 100 MVA. Em seguida, mostre a solução do ANAREDE para o SEP dado.

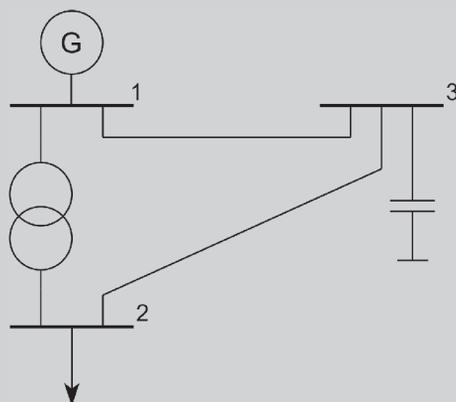


Figura 4.8 – Sistema com três barras

Tabela – Dados dos ramos

Barra emissora	Barra receptora	Resistência (pu)	Reatância (pu)	Tape em fase (pu)	Tape em quadratura (pu)
1	3	0,084	0,336	-	-
1	2	-	0,050	0,98	0,15
2	3	0,042	0,168	-	-

Os tapes fora do nominal estão do lado 1.

Tabela – Dados das barras

Número da barra	Tipo de barra	Módulo de tensão (pu)	Ângulo de tensão (graus)	Potência ativa gerada (pu)	Potência reativa gerada (pu)	Potência ativa consumida (pu)	Potência reativa consumida (pu)
1	REF	1,0	0,0	-	-	-	-
2	PQ	1,0	0,0	-	-	0,8	0,6
3	PV	1,1	0,0	0,4	-	-	-

**Solução:**

Obs: todos os cálculos foram realizados no modo *format long* do MATLAB e apresentados no *format short*.

Montagem da matriz de admitâncias

Cálculo dos elementos físicos:

$$y_{12} = \frac{1}{jx_{12}} = \frac{1}{j0.05} = -j20 \text{ pu}$$

$$y_{13} = \frac{1}{r_{13} + jx_{13}} = \frac{1}{0.084 + j0.336} = 0.7003 - j2.8011 \text{ pu}$$

$$y_{23} = \frac{1}{r_{23} + jx_{23}} = \frac{1}{0.042 + j0.168} = 1.4006 - j5.6022 \text{ pu}$$

$$y_c = \frac{1}{j1} = -j1 \text{ pu}$$

Cálculo dos elementos da diagonal principal:

$$Y_{11} = \frac{y_{12}}{(tf^2 + tq^2)} + y_{13} = -\frac{j20}{(0.98^2 + 0.15^2)} + 0.7003 - j2.8011 \\ = 0.7003 - j23.1490 \text{ pu}$$

$$Y_{22} = y_{12} + y_{23} + y_c = -j20 + 1.4006 - j5.6022 - j1 = 1.4006 - j26.6022 \text{ pu}$$

$$Y_{33} = y_{13} + y_{23} = 0.7003 - j2.8011 + 1.4006 - j5.6022 = 2.1009 - j8.4033 \text{ pu}$$

Cálculo dos elementos fora da diagonal principal:

$$Y_{12} = -\frac{y_{12}}{(tf - jtq)} = \left[ -\frac{(-j20)}{(0.98 - j0.15)} \right] = -3.0522 + j19.9410 \text{ pu}$$

$$Y_{13} = -y_{13} = -0.7003 + j2.8011 \text{ pu}$$

$$Y_{21} = -\frac{y_{12}}{(tf + jtq)} = \left[ -\frac{(-j20)}{(0.98 + j0.15)} \right] = 3.0522 + j19.9410 \text{ pu}$$

$$Y_{23} = -y_{23} = -1.4006 + j5.6022 \text{ pu}$$

$$Y_{31} = Y_{13}$$

$$Y_{32} = Y_{23}$$

Portanto a matriz  $[Y]$  é igual a:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} 0.7003 - j23.1490 & -3.0522 + j19.9410 & -0.7003 + j2.8011 \\ 3.0522 + j19.9410 & 1.4006 - j26.6022 & -1.4006 + j5.6022 \\ -0.7003 + j2.8011 & -1.4006 + j5.6022 & 2.1009 - j8.4033 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz  $[Y]$  é assimétrica.

Estrutura dos vetores  $[\theta]$ ,  $[V]$ ,  $[\Delta\theta]$ ,  $[\Delta V/V]$ ,  $[\Delta P]$  e  $[\Delta Q]$  :

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad [\Delta\theta] = \begin{bmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} \quad [\Delta P] = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \end{bmatrix}$$

$$[V] = [V_2] \quad [\Delta V/V] = [\Delta V_2/V_2] \quad [\Delta Q] = [\Delta Q_2]$$

Note que a estrutura dos vetores está relacionada com o número de barras PV e PQ do SEP.

Estrutura da matriz jacobiana:

$$[J_{ac}] = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} & N_{22} \\ H_{32} & H_{33} & N_{32} \\ J_{22} & J_{23} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} NPQ + \\ NPV \\ NPQ \end{cases}$$

$$\underbrace{NPQ + \quad NPV \quad NPQ}$$

Observe a dimensão da matriz jacobiana e note que os índices dos elementos são vinculados com a numeração das barras do SEP e não com os índices da matriz.

Estimativas iniciais.

Usa-se o perfil plano.

$$\begin{bmatrix} \theta^{(1)} \\ V^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Processo iterativo.

Primeira iteração

Cálculo dos resíduos de potência ativa e reativa.

Os cálculos são feitos usando-se as equações (4.44) e (4.45), repetidas abaixo:

$$\Delta P_i = P_i^G - P_i^C - P_i^T = P_i^G - P_i^C - V_i \sum_{k=1}^N V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})$$

$$\Delta Q_i = Q_i^G - Q_i^C - Q_i^T = Q_i^G - Q_i^C - V_i \sum_{k=1}^N V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})$$

Resíduos de potência ativa:

$$\begin{aligned} P_2^T &= V_2 \sum_{k=1}^3 V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \\ &= V_2^{(1)} \left[ V_1^{(1)} (G_{21} \cos \theta_{21}^{(1)} + B_{21} \sin \theta_{21}^{(1)}) + V_2^{(1)} (G_{22} \cos \theta_{22}^{(1)} + B_{22} \sin \theta_{22}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + V_3^{(1)} (G_{23} \cos \theta_{23}^{(1)} + B_{23} \sin \theta_{23}^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

$$P_2^T = 1[1(3.0522) + 1(1.4006) + 1.1(-1.4006)] = 2.9121 \text{ pu}$$

$$\Delta P_2 = P_2^G - P_2^C - P_2^T = 0 - 0.8 - (2.9121) = -3.7121 \text{ pu}$$

---


$$\begin{aligned} P_3^T &= V_3 \sum_{k=1}^3 V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \\ &= V_3^{(1)} \left[ V_1^{(1)} (G_{31} \cos \theta_{31}^{(1)} + B_{31} \sin \theta_{31}^{(1)}) + V_2^{(1)} (G_{32} \cos \theta_{32}^{(1)} + B_{32} \sin \theta_{32}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + V_3^{(1)} (G_{33} \cos \theta_{33}^{(1)} + B_{33} \sin \theta_{33}^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

$$P_3^T = 1.1[1(-0.7003) + 1(-1.4006) + 1.1(2.1009)] = 0.2311 \text{ pu}$$

$$\Delta P_3 = P_3^G - P_3^C - P_3^T = 0.4 - 0 - (0.2311) = 0.1689 \text{ pu}$$

Resíduos de potência reativa:

$$\begin{aligned} Q_2^T &= V_2 \sum_{k=1}^3 V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \\ &= V_2^{(1)} \left[ V_1^{(1)} (G_{21} \sin \theta_{21}^{(1)} - B_{21} \cos \theta_{21}^{(1)}) + V_2^{(1)} (G_{22} \sin \theta_{22}^{(1)} - B_{22} \cos \theta_{22}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + V_3^{(1)} (G_{23} \sin \theta_{23}^{(1)} - B_{23} \cos \theta_{23}^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

$$Q_2^T = 1[1(-19.9410) + 1(26.6022) + 1.1(-5.6022)] = 0.4988 \text{ pu}$$

$$\Delta Q_2 = Q_2^G - Q_2^C - Q_2^T = 0 - 0.6 - (0.4988) = -1.0988 \text{ pu}$$

O valor da potência transmitida na barra 3 será necessária para calcular um elemento da matriz jacobiana.

$$\begin{aligned} Q_3^T &= V_3 \sum_{k=1}^3 V_k (G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \text{cos} \theta_{ik}) \\ &= V_3^{(1)} \left[ V_1^{(1)} (G_{31} \text{sen} \theta_{31}^{(1)} - B_{31} \text{cos} \theta_{31}^{(1)}) + V_2^{(1)} (G_{32} \text{sen} \theta_{32}^{(1)} - B_{32} \text{cos} \theta_{32}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + V_3^{(1)} (G_{33} \text{sen} \theta_{33}^{(1)} - B_{33} \text{cos} \theta_{33}^{(1)}) \right] \end{aligned}$$

$$Q_3^T = 1.1[1(-2.8011) + 1(-5.6022) + 1.1(8.4033)] = 0.9244 \text{ pu}$$

De acordo com o fluxograma da Fig. 4.5, o teste de convergência deve ser realizado. Adotando-se uma tolerância de 0,0001 pu para todos os resíduos, nota-se que a convergência não foi alcançada.

Cálculo e inversão da matriz jacobiana (usando artificio de Van Ness e Griffin).

Os cálculos são feitos usando as equações (4.80) a (4.83).

Elementos da diagonal principal de cada submatriz.

$$H_{22}^{(1)} = -(V_2^{(1)})^2 B_{22} - Q_2^T = -1^2(-26.6022) - 0.4988 = 26.1035$$

$$H_{33}^{(1)} = -(V_3^{(1)})^2 B_{33} - Q_3^T = -1.1^2(-8.4033) - 0.9244 = 9.2437$$

$$N_{22}^{(1)} = (V_2^{(1)})^2 G_{22} + P_2^T = 1^2(1.4006) + (2.9121) = 4.3127$$

$$J_{22}^{(1)} = P_2^T - (V_2^{(1)})^2 G_{22} = (2.9121) - 1^2(1.4006) = 1.5116$$

$$L_{22}^{(1)} = Q_2^T - (V_2^{(1)})^2 B_{22} = 0.4988 - 1^2(-26.6022) = 27.1010$$

Elementos fora da diagonal principal de cada submatriz.

$$H_{23}^{(1)} = V_2^{(1)} V_3^{(1)} (G_{23} \text{sen} \theta_{23}^{(1)} - B_{23} \text{cos} \theta_{23}^{(1)}) = 1 \times 1.1 (-1.4006 \times 0 - 5.6022 \times 1) = -6.1625$$

$$H_{32}^{(1)} = H_{23}^{(1)} = -6.1625$$

$$N_{32}^{(1)} = V_3^{(1)} V_2^{(1)} (G_{32} \text{cos} \theta_{32}^{(1)} + B_{32} \text{sen} \theta_{32}^{(1)}) = 1.1 \times 1 (-1.4006 \times 1 + 5.6022 \times 0) = -1.5406$$

$$J_{23}^{(1)} = -V_2^{(1)} V_3^{(1)} (G_{23} \text{cos} \theta_{23}^{(1)} + B_{23} \text{sen} \theta_{23}^{(1)}) = -1.1 \times 1 (-1.4006 \times 1 + 5.6022 \times 0) = 1.5406$$

A matriz jacobiana e a sua inversa são mostradas a seguir:

$$[J_{ac}] = \begin{bmatrix} 26.1035 & -6.1624 & 4.3127 \\ -6.1624 & 9.2437 & -1.5406 \\ 1.5116 & 1.5406 & 27.1010 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz jacobiana é simétrica apenas em estrutura.

$$[J_{ac}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0461 & 0.0317 & -0.0055 \\ 0.0300 & 0.1278 & 0.0025 \\ -0.0043 & -0.0090 & 0.0371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = [J_{ac}]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0461 & 0.0317 & -0.0055 \\ 0.0300 & 0.1278 & 0.0025 \\ -0.0043 & -0.0090 & 0.0371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.7121 \\ 0.1689 \\ -1.0988 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \\ -0.0926 \\ -0.0264 \end{bmatrix}$$

Atualização das variáveis.

Os valores dos ângulos de tensão estão em radianos, e o valor do módulo de tensão está em pu.

$$\begin{bmatrix} \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2^{(0)} \\ \theta_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \theta_2^{(1)} \\ \Delta \theta_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1597 \\ -0.0926 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \text{ rad} \\ -0.0926 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

A tensão é calculada como:

$$\frac{\Delta V_2^{(1)}}{V_2^{(1)}} = \frac{V_2^{(1)} - V_2^{(0)}}{V_2^{(1)}} = -0.0264$$

$$V_2^{(1)}(1 + 0.0264) = V_2^{(0)}$$

$$V_2^{(1)} = \frac{1}{1.0264} = 0.9743 \text{ pu}$$

Segunda iteração

$$P_2^T = V_2^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{21} \cos \theta_{21}^{(2)} + B_{21} \sin \theta_{21}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{22} \cos \theta_{22}^{(2)} + B_{22} \sin \theta_{22}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{23} \cos \theta_{23}^{(2)} + B_{23} \sin \theta_{23}^{(2)} \right) \right]$$

$$P_2^T = 0.9743 \left[ 1 \left( 3.0522 \cos(-0.1597 - 0) + 19.9410 \sin(-0.1597 - 0) \right) + 0.9743 \left( 1.4006 \cos 0 \right) + 1.1 \left( -1.4006 \cos(-0.1597 + 0.0926) + 5.6022 \sin(-0.1597 + 0.0926) \right) \right] = -0.7247$$

$$\Delta P_2 = 0 - 0.8 - (-0.7247) = -0.0753 \text{ pu}$$

$$P_3^T = V_3^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{31} \cos \theta_{31}^{(2)} + B_{31} \sin \theta_{31}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{32} \cos \theta_{32}^{(2)} + B_{32} \sin \theta_{32}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{33} \cos \theta_{33}^{(2)} + B_{33} \sin \theta_{33}^{(2)} \right) \right]$$

$$P_3^T = 1.1 \left[ 1 \left( -0.7003 \cos(-0.0926 - 0) + 2.8011 \sin(-0.0926 - 0) \right) + 0.9743 \left( -1.4006 \cos(-0.0926 + 0.1597) \right) + 5.6022 \sin(-0.0926 + 0.1597) \right] + 1.1(2.1009) = 0.3982$$

$$\Delta P_3 = 0.4 - 0 - (0.3982) = 0.0018 \text{ pu}$$

Resíduos de potência reativa

$$Q_2^T = V_2^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{21} \sin \theta_{21}^{(2)} - B_{21} \cos \theta_{21}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{22} \sin \theta_{22}^{(2)} - B_{22} \cos \theta_{22}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{23} \sin \theta_{23}^{(2)} - B_{23} \cos \theta_{23}^{(2)} \right) \right]$$

$$Q_2^T = 0.9743[1(3.0522\text{sen}(-0.1597 - 0) - 19.9410\text{cos}(-0.1597 - 0)) \\ + 0.9743(26.6022\text{cos}0) \\ + 1.1(-1.4006\text{sen}(-0.1597 + 0.0926) \\ - 5.6022\text{cos}(-0.1597 + 0.0926))] = -0.2915$$

$$\Delta Q_2 = 0 - 0.6 - (-0.2915) = -0.3085 \text{ pu}$$

$$Q_3^T = V_3^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{31}\text{sen}\theta_{31}^{(2)} - B_{31}\text{cos}\theta_{31}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{32}\text{sen}\theta_{32}^{(2)} - B_{32}\text{cos}\theta_{32}^{(2)} \right) \right. \\ \left. + V_3^{(2)} \left( G_{33}\text{sen}\theta_{33}^{(2)} - B_{33}\text{cos}\theta_{33}^{(2)} \right) \right]$$

$$Q_3^T = 1.1[1(-0.7003\text{sen}(-0.0926 - 0) - 2.8011\text{cos}(-0.0926 - 0)) \\ + 0.9743(-1.4006\text{sen}(-0.0926 + 0.1597) \\ - 5.6022\text{cos}(-0.0926 + 0.1597)) + 1.1(8.4033\text{cos}0)] = 1.0800$$

Cálculo e inversão da matriz jacobiana

Elementos da diagonal principal de cada submatriz

$$H_{22}^{(2)} = -(V_2^{(2)})^2 B_{22} - Q_2^T = -0.9743^2(-26.6022) + 0.2915 = 25.5442$$

$$H_{33}^{(2)} = -(V_3^{(2)})^2 B_{33} - Q_3^T = -1.1^2(-8.4033) - 1.0800 = 9.0881$$

$$N_{22}^{(2)} = (V_2^{(2)})^2 G_{22} + P_2^T = 0.9743^2(1.4006) + (-0.7247) = 0.6048$$

$$J_{22}^{(2)} = P_2^T - (V_2^{(2)})^2 G_{22} = (-0.7247) - 0.9743^2(1.4006) = -2.0542$$

$$L_{22}^{(2)} = Q_2^T - (V_2^{(2)})^2 B_{22} = -0.2915 - 0.9743^2(-26.6022) = 24.9613$$

Elementos fora da diagonal principal de cada submatriz.

$$H_{23}^{(2)} = V_2^{(2)} V_3^{(2)} \left( G_{23}\text{sen}\theta_{23}^{(2)} - B_{23}\text{cos}\theta_{23}^{(2)} \right) \\ = 0.9743 \times 1.1(-1.4006\text{sen}(-0.1597 + 0.0926) \\ - 5.6022\text{cos}(-0.1597 + 0.0926)) = -5.8899$$

$$H_{32}^{(2)} = H_{23}^{(2)} = -5.8899$$

$$N_{32}^{(2)} = V_3^{(2)} V_2^{(2)} \left( G_{32}\text{cos}\theta_{32}^{(2)} + B_{32}\text{sen}\theta_{32}^{(2)} \right) \\ = 1.1 \times 0.9743(-1.4006\text{cos}(-0.0926 + 0.1597) \\ + 5.6022\text{sen}(-0.0926 + 0.1597)) = -1.0950$$

$$\begin{aligned}
 J_{23}^{(2)} &= -V_2^{(2)} V_3^{(2)} \left( G_{23} \cos \theta_{23}^{(2)} + B_{23} \sin \theta_{23}^{(2)} \right) \\
 &= 0.9743 \times 1.1 \left( -1.4006 \cos(-0.1597 + 0.0926) \right. \\
 &\quad \left. + 5.6022 \sin(-0.1597 + 0.0926) \right) = 1.9003
 \end{aligned}$$

A matriz jacobiana e a sua inversa são mostradas a seguir:

$$[J_{ac}] = \begin{bmatrix} 25.5442 & -5.8899 & 0.6048 \\ -5.8899 & 9.0881 & -1.0950 \\ -2.0542 & 1.9003 & 24.9613 \end{bmatrix}$$

$$[J_{ac}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0460 & 0.0298 & 0.0002 \\ 0.0300 & 0.1285 & 0.0049 \\ 0.0015 & -0.0073 & 0.0397 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = [J_{ac}]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0460 & 0.0298 & 0.0002 \\ 0.0300 & 0.1285 & 0.0049 \\ 0.0015 & -0.0073 & 0.0397 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0753 \\ 0.0018 \\ -0.3085 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0035 \\ -0.0035 \\ -0.0124 \end{bmatrix}$$

Atualização das variáveis

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \theta_2^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \theta_2^{(1)} \\ \Delta \theta_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \\ -0.0926 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0035 \\ -0.0035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \text{ rad} \\ -0.0926 \text{ rad} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -9.3497 \text{ graus} \\ -5.5082 \text{ graus} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V_2^{(2)}}{V_2^{(2)}} = \frac{V_2^{(2)} - V_2^{(1)}}{V_2^{(2)}} = -0.0124$$

$$V_2^{(2)} (1 + 0.0124) = V_2^{(1)}$$

$$V_2^{(2)} = \frac{0.9743}{0.0124} = 0.9875 \text{ pu}$$

Cálculo da segunda iteração sem usar o artifício de Van Ness e Griffin

Como usamos o perfil plano para iniciar o módulo de tensão da barra 2 e os ângulos de tensões das barras 2 e 3, os cálculos da primeira iteração mudam somente no final para calcular o módulo de tensão da barra 2, como a seguir:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \\ -0.0926 \\ -0.0264 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2^{(0)} \\ \theta_3^{(0)} \\ V_2^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1597 \\ -0.0926 \\ -0.0264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \text{ rad} \\ -0.0926 \text{ rad} \\ 0.9736 \text{ pu} \end{bmatrix}$$

Segunda iteração

$$P_2^T = V_2^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{21} \cos\theta_{21}^{(2)} + B_{21} \text{sen}\theta_{21}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{22} \cos\theta_{22}^{(2)} + B_{22} \text{sen}\theta_{22}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{23} \cos\theta_{23}^{(2)} + B_{23} \text{sen}\theta_{23}^{(2)} \right) \right]$$

$$P_2^T = 0.9736 \left[ 1(3.0522 \cos(-0.1597 - 0) + 19.9410 \text{sen}(-0.1597 - 0)) + 0.9736(1.4006 \cos 0) + 1.1(-1.4006 \cos(-0.1597 + 0.0926) + 5.6022 \text{sen}(-0.1597 + 0.0926)) \right] = -0.7251$$

$$\Delta P_2 = 0 - 0.8 - (-0.7251) = -0.0749 \text{ pu}$$

$$P_3^T = V_3^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{31} \cos\theta_{31}^{(2)} + B_{31} \text{sen}\theta_{31}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{32} \cos\theta_{32}^{(2)} + B_{32} \text{sen}\theta_{32}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{33} \cos\theta_{33}^{(2)} + B_{33} \text{sen}\theta_{33}^{(2)} \right) \right]$$

$$P_3^T = 1.1 \left[ 1(-0.7003 \cos(-0.0926 - 0) + 2.8011 \text{sen}(-0.0926 - 0)) + 0.9736(-1.4006 \cos(-0.0926 + 0.1597)) + 5.6022 \text{sen}(-0.0926 + 0.1597) \right] + 1.1(2.1009) = 0.3989$$

$$\Delta P_3 = 0.4 - 0 - (0.3989) = 0.0011 \text{ pu}$$

Resíduos de potência reativa

$$Q_2^T = V_2^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{21} \text{sen} \theta_{21}^{(2)} - B_{21} \text{cos} \theta_{21}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{22} \text{sen} \theta_{22}^{(2)} - B_{22} \text{cos} \theta_{22}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{23} \text{sen} \theta_{23}^{(2)} - B_{23} \text{cos} \theta_{23}^{(2)} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} Q_2^T &= 0.9736 [1(3.0522 \text{sen}(-0.1597 - 0) - 19.9410 \text{cos}(-0.1597 - 0)) \\ &\quad + 0.9736(26.6022 \text{cos} 0) \\ &\quad + 1.1(-1.4006 \text{sen}(-0.1597 + 0.0926) - 5.6022 \text{cos}(-0.1597 + 0.0926))] \\ &= -0.3088 \end{aligned}$$

$$\Delta Q_2 = 0 - 0.6 - (-0.3088) = -0.2912 \text{ pu}$$

$$Q_3^T = V_3^{(2)} \left[ V_1^{(2)} \left( G_{31} \text{sen} \theta_{31}^{(2)} - B_{31} \text{cos} \theta_{31}^{(2)} \right) + V_2^{(2)} \left( G_{32} \text{sen} \theta_{32}^{(2)} - B_{32} \text{cos} \theta_{32}^{(2)} \right) + V_3^{(2)} \left( G_{33} \text{sen} \theta_{33}^{(2)} - B_{33} \text{cos} \theta_{33}^{(2)} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} Q_3^T &= 1.1 [1(-0.7003 \text{sen}(-0.0926 - 0) - 2.8011 \text{cos}(-0.0926 - 0)) \\ &\quad + 0.9736(-1.4006 \text{sen}(-0.0926 + 0.1597) \\ &\quad - 5.6022 \text{cos}(-0.0926 + 0.1597)) + 1.1(8.4033 \text{cos} 0)] = 1.0842 \end{aligned}$$

Cálculo e inversão da matriz jacobiana

Elemento da diagonal principal de cada submatriz

$$H_{22}^{(2)} = -(V_2^{(2)})^2 B_{22} - Q_2^T = -0.9736^2(-26.6022) + 0.3088 = 25.5265$$

$$H_{33}^{(2)} = -(V_3^{(2)})^2 B_{33} - Q_3^T = -1.1^2(-8.4033) - 1.0842 = 9.0838$$

$$N_{22}^{(2)} = \left( (V_2^{(2)})^2 G_{22} + P_2^T \right) / V_2^{(2)} = (0.9736^2(1.4006) + (-0.7251)) / 0.9736 = 0.6189$$

$$J_{22}^{(2)} = P_2^T - (V_2^{(2)})^2 G_{22} = (-0.7251) - 0.9736^2(1.4006) = -2.0528$$

$$L_{22}^{(2)} = \left( Q_2^T - (V_2^{(2)})^2 B_{22} \right) / V_2^{(2)} = (-0.3088 - 0.9736^2(-26.6022)) / 0.9736 = 25.5835$$

Elemento fora da diagonal principal de cada submatriz

$$\begin{aligned} H_{23}^{(2)} &= V_2^{(2)} V_3^{(2)} \left( G_{23} \text{sen} \theta_{23}^{(2)} - B_{23} \text{cos} \theta_{23}^{(2)} \right) \\ &= 0.9736 \times 1.1 \left( -1.4006 \text{sen}(-0.1597 + 0.0926) \right. \\ &\quad \left. - 5.6022 \text{cos}(-0.1597 + 0.0926) \right) = -5.8858 \end{aligned}$$

$$H_{32}^{(2)} = H_{23}^{(2)} = -5.8858$$

$$\begin{aligned} N'_{32}^{(2)} &= V_3^{(2)} \left( G_{32} \text{cos} \theta_{32}^{(2)} + B_{32} \text{sen} \theta_{32}^{(2)} \right) \\ &= 1.1 \left( -1.4006 \text{cos}(-0.0926 + 0.1597) + 5.6022 \text{sen}(-0.0926 + 0.1597) \right) \\ &= -1.1239 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{23}^{(2)} &= -V_2^{(2)} V_3^{(2)} \left( G_{23} \text{cos} \theta_{23}^{(2)} + B_{23} \text{sen} \theta_{23}^{(2)} \right) \\ &= 0.9736 \times 1.1 \left( -1.4006 \text{cos}(-0.1597 + 0.0926) \right. \\ &\quad \left. + 5.6022 \text{sen}(-0.1597 + 0.0926) \right) = 1.8990 \end{aligned}$$

A matriz jacobiana e a sua inversa são mostradas a seguir:

$$[J_{ac}] = \begin{bmatrix} 25.5265 & -5.8858 & 0.6189 \\ -5.8858 & 9.0838 & -1.1239 \\ -2.0528 & 1.8990 & 25.5835 \end{bmatrix}$$

$$[J_{ac}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0461 & 0.0298 & 0.0002 \\ 0.0300 & 0.1285 & 0.0049 \\ 0.0015 & -0.0073 & 0.0398 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = [J_{ac}]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0461 & 0.0298 & 0.0002 \\ 0.0300 & 0.1285 & 0.0049 \\ 0.0015 & -0.0071 & 0.0387 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0749 \\ 0.0011 \\ -0.2912 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0035 \\ -0.0035 \\ -0.0114 \end{bmatrix}$$

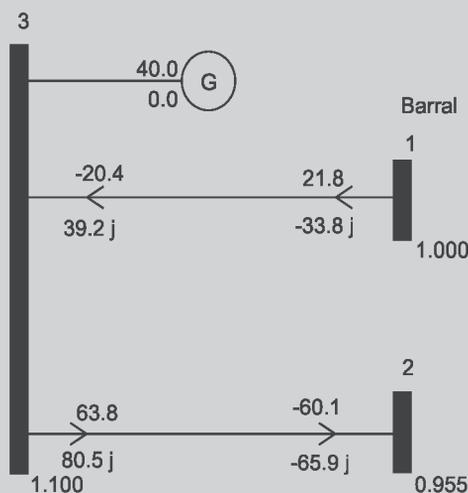
Atualização das variáveis

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_2^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \\ V_2^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(2)} \\ \Delta\theta_3^{(2)} \\ \Delta V_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1597 \\ -0.0926 \\ 0.9736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0035 \\ -0.0035 \\ -0.0114 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1632 \text{ rad} \\ -0.0961 \text{ rad} \\ 0.9622 \text{ pu} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9.3499 \text{ graus} \\ -5.5084 \text{ graus} \\ 0.9622 \text{ pu} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O módulo da tensão da barra 2, na segunda iteração, está mais próxima da solução do programa ANAREDE como mostrado a seguir.

## Solução

### Usando programa ANAREDE



CEPEL - CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELETRICA - PROGRAMA DE ANALISE DE REDES - V10.

RELATORIO DE BARRAS CA DO SISTEMA \* AREA 1 \*

NUM.	BARRA NOME	TENSAO			GERACAO		INJECAO EQUIV		CARGA	
		TP	MOD	ANG	MW	Mvar\	MW	Mvar	MW	Mvar
1	Barral	2	1.000	0.0	43.9	-25.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2		0	0.955	-9.3	0.0	0.0	0.0	0.0	80.0	60.0
3		-1	1.100	-5.3	40.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

O exemplo 4.4 demonstra a aplicação do método de Newton-Raphson através de um programa computacional escrito em linguagem MATLAB.

### Exemplo 4.4

Usando o programa a seguir, escrito em MATLAB, determine e analise a solução para o sistema de potência do exemplo 4.2.

Obs.: O programa abaixo foi dividido em funções programadas em arquivos separados do programa principal. Ele considera apenas SEP com tapes em fase fixos.

```

function busdt = busdatas(num)
% Tipo...
% 1 - Barra Slack..
% 2 - Barra PV..
% 3 - Barra PQ..
%|Barra| Tipo| Vesp |Ang | PG | QG | PC | QC | Qmin | Qmax | Bcr %
%Potências em MW/MVAr
busdat9 = [
    1    1    1.05    0    0    0    0    0    0    0    0
    2    2    1.04    0   163    0    0    0    0    0    0
    3    2    1.02    0    85    0    0    0    0    0    0
    4    3    1        0    0    0    0    0    0    0    0
    5    3    1        0    0    0    90   30    0    0    0
    6    3    1        0    0    0    0    0    0    0    0
    7    3    1        0    0    0   100   35    0    0    0
    8    3    1        0    0    0    0    0    0    0    0
    9    3    1        0    0    0   125   50    0    0    0];

function linedt = linedatas(num)
%      | Da      | Para | R      | X      | B/2 | X'mer |
%      | Barra | Barra | pu     | pu     | pu  | TAP tf| Tap
%      tq|
linedat9 = [
    1    4    0        0.0576    0        1    0
    4    5    0.017    0.092    0.079    1    0
    5    6    0.039    0.17     0.179    1    0
    3    6    0        0.0586    0        1    0
    6    7    0.0119    0.1008    0.1045    1    0
    7    8    0.0085    0.072    0.0745    1    0
    8    2    0        0.0625    0.125     1    0
    8    9    0.032     0.161     0.153     1    0
    9    4    0.01      0.085     0.088     1    0];

%
%
switch num
    case 9
        linedt = linedat9;
    case 3

function Y = ybusppg(num) % Retorne Y
linedata = linedatas(num); % Chamando Linedatas...
bus = busdatas(num); % Chamando rotinas de dados de barras
fb = linedata(:,1); % Número da barra origem...
tb = linedata(:,2); % Número da barra destino...
r = linedata(:,3); % Resistência, R...
x = linedata(:,4); % Reatância, X...
b = linedata(:,5); % Admitância para o terra, B/2...
%a=linedata(:,6);
tf = linedata(:,6); % Valor de setagem do tape fase..(se linha
é igual a 1
tq = linedata(:,7); % Valor de setagem do tape quadratura..se
não tiver é igual a 0
z = r + i*x; % matriz z...
y = 1./z ; % admitância física de cada elemento...
b = i*b; % Torna B imaginário...
bcr = bus(:,11); % Ler banco de capacitor-reator
bcr = i*bcr/100; % Colocar o i imaginário e divide pela
base de potência
%nb = max(max(fb),max(tb)); % Número de barras...
nb = num;

```

```

nl = length(fb); % Número de ramos...
Y = zeros(nb,nb); % Inicialize YBus...
% Formação dos elementos fora da diagonal...
for k = 1:nl
    Y(fb(k),tb(k)) = Y(fb(k),tb(k)) - y(k)/(tf(k));
    Y(tb(k),fb(k)) = Y(tb(k),fb(k)) - y(k)/(tf(k));
end
% Formação dos elementos da diagonal...
for m = 1:nb
    for n = 1:nl
        if fb(n) == m
            Y(m,m) = Y(m,m) + y(n)/(tf(n)^2) + b(n);
        elseif tb(n) == m
            Y(m,m) = Y(m,m) + y(n) + b(n);
        end
    end
end
% colocação de banco de capacitores ou indutores
for m=1:nb
    Y(m,m)=Y(m,m)+bcr(m);
end

% Arquivo principal do programa de Fluxo de potência - Principal_Newton.m
% Programa Fluxo de potência Newton-Raphson
clear all
clc
tic
nbus=3; % Pode ser qualquer sistema: IEEE-14, IEEE-30,
IEEE-57...
Y = ybusppg(nbus); % Chamando ybusppg.m para obter a matriz Y-Bus..
busd = busdatas(nbus); % Chamando busdatas..
linedata = linedatas(nbus); % Chamando Linedatas...
r = linedata(:,3); % Resistência, R...
x = linedata(:,4); % Reatância, X...
bo = linedata(:,1); % Número da barra origem...
bf = linedata(:,2); % Número da barra destino...
nl = length(bo); % Número de ramos...
b1 = linedata(:,5); % Admitância de terra, B/2...
tap = linedata(:,6); % Valor de setagem do tape..
BMva = 100; % Base MVA..
bus = busd(:,1); % Número da barra..
type = busd(:,2); % Tipo da Barra 1-Slack, 2-PV, 3-PQ..
V = busd(:,3); % Tensão especificada..
del = busd(:,4); % ângulo da tensão..
Pg = busd(:,5)/BMva; % PGi..
Qg = busd(:,6)/BMva; % QGi..
Pl = busd(:,7)/BMva; % PLi..
Ql = busd(:,8)/BMva; % QLi..
Qmin = busd(:,9)/BMva; % Limite mínimo de potência reativa..
Qmax = busd(:,10)/BMva; % Limite máximo de potência reativa..
P = Pg - Pl; % Pi = PGi - PLi..
Q = Qg - Ql; % Qi = QGi - QLi..
Psp = P; % P Especificado..
Qsp = Q; % Q Especificado..
G = real(Y); % Matriz de condutância..
B = imag(Y); % Matriz de susceptância..

pv = find(type == 2 | type == 1); % Barras PV..
pq = find(type == 3); % Barras PQ..
npv = length(pv); % Número da barra PV..

```

```

npq = length(pq); % Número da barra PQ.
itmax=0;
Tol = 1;
Iter = 0;
Toler= 0.000001;

while (Iter <= itmax) % Início das iterações..
    P = zeros(nbus,1);
    Q = zeros(nbus,1);
    % Calcule P e Q
    for i = 1:nbus
        for k = 1:nbus
            P(i) = P(i) + V(i)* V(k)*(G(i,k)*cos(del(i)-del(k)) + B(i,k)*-
sin(del(i)-del(k)));
            Q(i) = Q(i) + V(i)* V(k)*(G(i,k)*sin(del(i)-del(k)) - B(i,k)*-
cos(del(i)-del(k)));
        end
    end
    % Calcule a mudança do valor especificado
    dPa = Psp-P;
    dQa = Qsp-Q;
    k = 1;
    dQ = zeros(npq,1);
    for i = 1:nbus
        if type(i) == 3
            dQ(k,1) = dQa(i);
            k = k+1;
        end
    end
    dP = dPa(2:nbus);
    M = [dP; dQ]; % Vetor de residuos dP e dQ
    Tol=max(abs(M));
    if(Tol <= Toler)
        break
    end
    % Jacobiano
    % J1 - Derivada da injeção das potências ativas com relação aos ângulos
    das tensões..
    J1 = zeros(nbus-1,nbus-1);
    for i = 1:(nbus-1)
        m = i+1;
        for k = 1:(nbus-1)
            n = k+1;
            if n == m
                for n = 1:nbus
                    J1(i,k) = J1(i,k) + V(m)* V(n)*(-G(m,n)*sin(del(m)-
del(n)) + B(m,n)*cos(del(m)-del(n)));
                end
                J1(i,k) = J1(i,k) - V(m)^2*B(m,m);
            else
                J1(i,k) = V(m)* V(n)*(G(m,n)*sin(del(m)-del(n)) - B(m,n)*-
cos(del(m)-del(n)));
            end
        end
    end
    end
    % J2 - Derivada da injeção das potências ativas com relação ao módulo
    das tensões...
    J2 = zeros(nbus-1,npq);

```

```

for i = 1:(nbus-1)
    m = i+1;
    for k = 1:npq
        n = pq(k);
        if n == m
            for n = 1:nbus
                J2(i,k) = J2(i,k) + V(n) * (G(m,n) * cos(del(m)-del(n)) +
B(m,n) * sin(del(m)-del(n)));
            end
            J2(i,k) = J2(i,k) + V(m) * G(m,m);
        else
            J2(i,k) = V(m) * (G(m,n) * cos(del(m)-del(n)) + B(m,n) * sin(-
del(m)-del(n)));
        end
    end
end

% J3 - Derivada da injeção das potências reativas com relação ao ângulo
das tensões..
J3 = zeros(npq,nbus-1);
for i = 1:npq
    m = pq(i);
    for k = 1:(nbus-1)
        n = k+1;
        if n == m
            for n = 1:nbus
                J3(i,k) = J3(i,k) + V(m) * V(n) * (G(m,n) * cos(del(m)-
del(n)) + B(m,n) * sin(del(m)-del(n)));
            end
            J3(i,k) = J3(i,k) - V(m)^2 * G(m,m);
        else
            J3(i,k) = V(m) * V(n) * (-G(m,n) * cos(del(m)-del(n)) - B(m,n) * -
sin(del(m)-del(n)));
        end
    end
end

% J4 - Derivada da injeção das potências reativas com relação ao módulo
das tensões V..
J4 = zeros(npq,npq);
for i = 1:npq
    m = pq(i);
    for k = 1:npq
        n = pq(k);
        if n == m
            for n = 1:nbus
                J4(i,k) = J4(i,k) + V(n) * (G(m,n) * sin(del(m)-del(n)) -
B(m,n) * cos(del(m)-del(n)));
            end
            J4(i,k) = J4(i,k) - V(m) * B(m,m);
        else
            J4(i,k) = V(m) * (G(m,n) * sin(del(m)-del(n)) - B(m,n) * cos(-
del(m)-del(n)));
        end
    end
end

J = [J1 J2; J3 J4]; % Matriz Jacobiana..
Jac=sparse(J);

```

```

X = inv(Jac)*M;           % Vetor de correção
dTh = X(1:nbus-1);       % Mudança no ângulo da tensão..
dV = X(nbus:end);        % Mudança no modulo da tensão..

% Atualização do vetor de estados..
del(2:nbus) = dTh + del(2:nbus); % ângulo das tensões..
k = 1;
for i = 2:nbus
    if type(i) == 3
        V(i) = dV(k) + V(i); % Módulo das tensões..
        k = k+1;
    end
end

Iter = Iter + 1
end
t1=toc
loadflow(nbus,V,del,BMva); % Chamando loadflow.m..

function loadflow(nb,V,del,BMva)

Y = ybusppg(nb); % Chamando programa Ybus..
lined = linedatas(nb); % Obtém linedats..
busd = busdatas(nb); % Obtém busdatas..
Vm = pol2rect(V,del); % Convertendo polar para rectangular..
Del = 180/pi*del; % ângulos das tensões em graus...
fb = lined(:,1); % Barra origem...
tb = lined(:,2); % Barra destino...
r = lined(:,3); % Resistência, R...
x = lined(:,4); % Reatância, X...
bl=lined(:,5);
b = j*lined(:,5); % Admitância para o terra, B/2...
a = lined(:,6); % Valor de ajuste do tape..
z = r + i*x; % Matriz z...
y = 1./z; % Para obter a inversa de cada elemento...
nl = length(fb); % Número de ramos..
Pl = busd(:,7); % PLi..
Ql = busd(:,8); % QLi..

Iij = zeros(nb,nb);
Sij = zeros(nb,nb);
Sinj = zeros(nb,1);

% Injeções de correntes..
I = Y*Vm;
Im = abs(I);
Ia = angle(I);

%Fluxos de correntes nas linhas..
for n=1:nb
    for L=1:nl
        if fb(L)==n k=tb(L);
            Iij(n,k) = (Vm(n) - a(L)*Vm(k))*y(L)/a(L)^2 + b(L)/a(L)^2*Vm(n);
            Iij(k,n) = (Vm(k) - Vm(n)/a(L))*y(L) + b(L)*Vm(k);
        elseif tb(L)==n k = fb(L);
            Iij(n,k) = (Vm(n) - Vm(k)/a(L))*y(L) + b(L)*Vm(n);
            Iij(k,n) = (Vm(k) - a(L)*Vm(n))*y(L)/a(L)^2 + b(L)/a(L)^2*Vm(k);
        end
    end
end
end

```

```

Iij = sparse(Iij);
Iijm = abs(Iij);
Iija = angle(Iij);
%
% Fluxos de potência nas linhas..
for n=1:nb
    for L=1:nl
        if fb(L)==n    k=tb(L);
            Sij(n,k) = Vm(n)*conj(Iij(n,k))*BMva;
            Sij(k,n) = Vm(k)*conj(Iij(k,n))*BMva;
        elseif tb(L)==n    k = fb(L);
            Sij(n,k) = Vm(n)*conj(Iij(n,k))*BMva;
            Sij(k,n) = Vm(k)*conj(Iij(k,n))*BMva;
        end
    end
end

Pij = real(Sij);
Qij = imag(Sij);
% Perdas nas linhas..
Lij = zeros(nl,1);
for m = 1:nl
    p = fb(m); q = tb(m);
    Lij(m) = Sij(p,q) + Sij(q,p);
end
Lpij = real(Lij);
Lqij = imag(Lij);

% Injeções de potências nas barras
for il = 1:nb
    for k = 1:nb
        Sinj(il) = Sinj(il) + conj(Vm(il))* Vm(k)*Y(il,k)*BMva;
    end
end
Pi = real(Sinj);
Qi = -imag(Sinj);
Pg = Pi+Pl;
Qg = Qi+Ql;

disp('#####');
disp('-----');
disp('-----');
disp('      Análise do Fluxo de Carga pelo método de Newton Raphson      ');
disp('-----');
disp('-----');

disp('|      Barra      |      V      |      Ângulo      |      Injeção      |      Gera-');
disp('      |      Carga      |      |');
disp('|      Número      |      pu      |      Graus      |      MW      |      MVar      |      MW      |      Mvar');
disp('|      MW      |      MVar      |');
for m = 1:nb
    disp('-----');
    fprintf('%3g', m); fprintf(' %8.4f', V(m)); fprintf(' %8.4f',
Del(m));
    fprintf(' %8.3f', Pi(m)); fprintf(' %8.3f', Qi(m));
    fprintf(' %8.3f', Pg(m)); fprintf(' %12.6f', Qg(m));
    fprintf(' %8.3f', Pl(m)); fprintf(' %8.3f', Ql(m)); fprintf('\n');
end
disp('-----');
disp('-----');

```

```

fprintf(' Total          ');fprintf(' %8.3f', sum(Pi)); fprintf('
%8.3f', sum(Qi));
fprintf(' %8.3f', sum(Pi+Pl)); fprintf(' %8.3f', sum(Qi+Ql));
fprintf(' %8.3f', sum(Pl)); fprintf(' %8.3f', sum(Ql)); fprintf('\n');
disp('-----
-----');
disp('#####
#####');

disp('-----
-----');

disp('          Fluxos de Potências e Perdas
');
disp('-----
-----');
disp('|De   |Para |   P   |   Q   | De   | Para |   P   |   Q   |
Perdas nas Linhas   |');
disp('|Bus |Bus| MW   |   MVar | Bus | Bus| MW   | MVar |   MW   |
Mvar   |');
for m = 1:n1
    p = fb(m); q = tb(m);
    disp('-----
-----');
    fprintf('%4g', p); fprintf('%4g', q); fprintf(' %8.3f', Pij(p,q));
    fprintf(' %8.3f', Qij(p,q));
    fprintf(' %4g', q); fprintf('%4g', p); fprintf(' %8.3f', Pij(q,p));
    fprintf(' %8.3f', Qij(q,p));
    fprintf(' %12.6f', Lpij(m)); fprintf(' %12.6f', Lqij(m));
    fprintf('\n');
end
disp('-----
-----');
fprintf('   Perdas Totais          ');
fprintf(' %8.3f', sum(Lpij)); fprintf(' %8.3f', sum(Lqij)); fprin-
tf('\n');
disp('-----
-----');
disp('#####
#####');

t1 =

    0.1067

#####
#####

-----

    Análise do Fluxo de Carga pelo método de Newton Raphson

-----

|   Barra   |   V   | Ângulo |   Injeção   |   Geração
|   Carga   |   |
|   Número   |   pu   | Graus   | MW | MVar | MW | Mvar | MW
| MVar |

-----

    1   1.0000   0.0000   39.999   18.078   39.999   18.077656
0.000   0.000

```

```

-----
  2    0.9807    -2.3374    -39.999    -19.998    0.001    0.001684
40.000    20.000
-----
-----
Total          0.000    -1.921    40.000    18.079    40.000
20.000
-----
#####
#####
-----
-----
                                Fluxos de Potências e Perdas
-----
-----
|De  |Para |  P  |  Q  | De  | Para |  P  |  Q  | Per-
das nas Linhas |
|Bus |Bus|  MW  |  MVar  | Bus | Bus|  MW  |  MVar  |  MW  |
Mvar  |
-----
  1  2    39.999    18.078    2  1    -39.999    -19.998    0.000000
-1.920660
-----
-----
Perdas Totais          0.000
-1.921
-----
#####
#####

```

## 4.5.2 – Aspectos computacionais do método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson apresenta as seguintes características:

- Convergência rápida, mas sensível às condições iniciais das tensões, podendo levar a divergências.
- A convergência não é sensível a outros fatores que podem causar problemas a outros métodos, tais como a escolha da barra de referência, elementos *shunt* e presença de capacitores série.
- Necessita formar e inverter a matriz jacobiana a cada iteração.
- No método de Newton-Raphson tipicamente há três a cinco iterações, para tolerâncias de 0,1 a 0,001 MW, para uma base de 100 MVA.

- Uma iteração Newton-Raphson corresponde a um tempo aproximado de sete iterações Gauss-Seidel (para o mesmo sistema).
- Os gastos em memória de Newton-Raphson são proporcionais ao número de barras do SEP, nos casos em que a esparsidade é considerada.
- A programação do método é mais elaborada, em comparação com o método de Gauss-Seidel.

## 4.6 – Exercícios

4.6.1 – Encontre uma raiz da equação abaixo pelo método de Newton, com erro máximo admissível de 0,001.

$$x^3 - 19 = 0, \text{ com } x_1 = 3$$

4.6.2 – Idem para:

$$e^{3x} + 5 \cos(x) = 0, \text{ com } x_1 = 0$$

4.6.3 – Encontre uma raiz para o sistema de equações não lineares abaixo. Use o MATLAB e o método de Newton-Raphson.

$$f_1(x) = 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

4.6.4 – Nas soluções de fluxo de carga, o método de Newton-Raphson (NR) é superior ao de Gauss-Seidel (GS) por que:

a) O tempo para fazer uma iteração NR é menor do que o gasto para a iteração GS.

b) O número de iterações requerido pelo método de NR é maior do que no método de GS.

c) No método de NR, o número de iterações requeridas não é independente do tamanho do sistema.

d) As características do método NR não são afetadas pela escolha da barra de referência.

4.6.5 – Para resolver problemas de fluxo de carga, a característica de convergência do método de Newton-Raphson é:

- a) quadrática
- b) geométrica
- c) linear
- d) cúbica

4.6.6 – Para um sistema de potência com 14 barras, com três barras de tensão controlada, o tamanho da matriz jacobiana é:

- a) 14 x 14
- b) 24 x 24
- c) 23 x 23
- d) 28 x 28

4.6.7 – Supondo que no início de uma certa iteração da solução do fluxo de carga do SEP do exemplo 3.4.6, pelo método de Newton-Raphson, as tensões das barras tenham os valores indicados a seguir:

$$E_1 = 1,050 + j0 \quad E_2 = 1,0 - j0,048 \quad E_3 = 0,973 + j0,031$$

$$E_4 = 1,039 - j0,042 \quad E_5 = 0,923 - j0,053 \quad E_6 = 1,002 + j0,012$$

$$E_7 = 0,982 + j0,008$$

Calcule:

- a) O resíduo de potência ativa na barra quatro nessa iteração
- b) Os termos da matriz jacobiana nessa iteração

4.6.8 – Considere o SEP da figura 4.9 e os dados dos ramos mostrados na tabela 4.3. Partindo de valores estimativos iniciais, calcule a primeira reavaliação das tensões pelo método de Newton-Raphson.

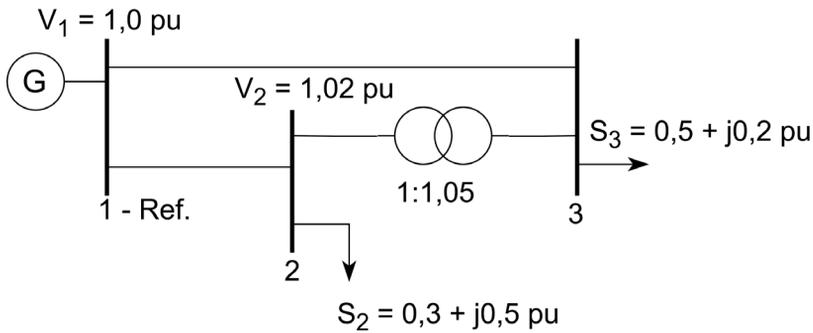


Figura 4.9 - Sistema para o exemplo 4.6.8

Tabela 4.3 – Dados dos ramos

Barras	Resistência (pu)	Reatância (pu)	Susceptância total (pu)	Tapes em fase (%)
1 – 2	0,019	0,059	0,020	–
1 – 3	0,013	0,048	0,012	–
2 – 3	0,005	0,060	–	105

4.6.9 – Monte o sistema de 14 barras do IEEE usando o programa do método de Newton-Raphson em MATLAB. Compare a solução com a do ANAREDE.

## Bibliografia

1. AMERONGEN, V. R. A. M. *A General-Purpose Version of the Fast-Decoupled Load Flow*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, N° 2, pp. 760 – 770, May 1989.
2. ELGERD, O. I. *Electric Energy Systems: An Introduction* second edition, McGraw Hill, NY, 1998. 533 p.
3. GLOVER, J. D., SARMA M. S. e OVERBYE T. J. *Power System Analysis and Design* 6<sup>th</sup> edition, Thomson Learning, USA, 2016. 818 p.
4. GRAINGER, J., e STEVENSON, W. D. Jr. *Power System Analysis*, Mc Graw-Hill Ed., 1994. 787 p.
5. GROSS, C. A. *Power Systems Analysis*, Wiley, New York, 1982. 593 p.
6. MONTICELLI, A. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Edgard Blucher, São paulo, 1983. 165 p.

7. STEVENSON, W. D. Jr. *Elements of Power System Analysis*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1982. 436 p.
8. STOTT, B., ALSAÇ, O. *Fast Decoupled Load Flow*, IEEE Trans. Power App. Syst. (July) (1974) pp. 859-869.
9. STOTT, B. *Review of Load Flow Calculation Methods*, Proc. of IEEE 62, pp. 916 – 929, 1974.
10. STOTT, B. *Decoupled Newton Load Flow*. IEEE Transactions on Power Systems, PAS- 91, September-October 1972, pp. 1955-1959.
11. TIBÚRCIO, J. C. *Análise de Sistemas de Potência*, UNIFEI, 1983.
12. WOOD, A. J., WOLLENBERG B. F. and SHEBLÉ, G. B. *Power Generation, Operation and Control*, 3th ed., John Wiley & Sons, New York, 2013. 622 p.